

Rectificatie

In *Bouwen met Staal* 195 stond dit artikel al geplaatst. Tijdens de grafische vormgeving zijn helaas enkele storende onvolkomenheden in het artikel geslopen. Deze zijn in dit verhaal gecorrigeerd. De redactie biedt haar excuses aan, niet in de laatste plaats aan de auteur en proefschriftschrijver.

Dit wetenschappelijke artikel is gebaseerd op een proefschrift van Willem Jan Raven. Dit hele document is integraal en ongeredigeerd op te halen van www.bouwenmetstaal.nl onder 'tijdschrift'. Daar komen ook andere documenten waarvan de samenvatting wordt gepubliceerd in *Bouwen met Staal* én (samenvattingen van) niet gepubliceerde essays, proefschriften of andere wetenschappelijk artikelen.

De berekening van de stabiliteit van staven die op druk en buiging worden belast, is een van de lastige problemen der mechanica. Vooral wanneer er een gerede kans is op uitbuiging van de staaf loodrecht op het vlak van de belasting. Willem Jan Raven presenteert in zijn proefschrift, waarop hij in mei 2006 promoveerde, een methode om kip snel en op een inzichtelijke manier te voorspellen. Hij introduceert hiertoe de term n^* als de verhouding tussen de totale vervorming en het aandeel van de tweede-orde effect daarin. Het blijkt mogelijk om hiermee, met slechts een zakrekenmachine, de stabiliteit en sterkte van een staaf op eenvoudige wijze te toetsen.

Geschiedenis

Het verschijnsel knik is reeds lang bekend en uitvoerig onderzocht. Al in 1729 stelde Petrus van Musschenbroek dat de sterkte van een staaf belast op druk evenredig is met de inverse van het kwadraat van de lengte^[2]. Vijftien jaar later kwam Euler met zijn bekende knikformule die nog steeds als basis dient voor stabiliteitsberekeningen^[3].

$$F_k = \pi^2 \frac{EI}{\ell_k^2} \quad (1)$$

Kip is een stuk lastiger te beschrijven. Hier voor is een stelsel van drie differentiaalvergelijkingen is nodig, dat slechts in een aantal specifieke gevallen makkelijk kan worden opgelost. In alle andere gevallen vraagt het om uitgebreid rekenwerk met reeksontwikkeling. Door Timoshenko werd veel hiervan uitgevoerd en gepubliceerd in bruikbare

Een nieuwe kijk op kip en knik

Vanuit zijn functie als lid van de Vereniging van Houtconstructeurs was Willem Jan Raven al enige tijd betrokken bij de problematiek van de instabiliteit van houten staven, voornamelijk in spanten. Zolang instabiliteit in het vlak van de belastingen wordt beschouwd (knik), valt dat nog mee. Echter, wanneer ook verplaatsingen en hoekverdraaiingen uit dat vlak op kunnen treden (kip) wordt het veel moeilijker de stabiliteit van een staaf te toetsen. De materiaalnormen die onder NEN 6702 vallen bieden hier weliswaar methodes voor, maar daarbij gaat het inzicht in het gedrag van de staaf snel verloren. Bovendien blijken er per norm verschillende methodes te worden gehanteerd. Het ontwikkelen van een snelle en inzichtelijke methode om het kipedrag van staven te voorspellen, werd daarom het doel van promotieonderzoek van Raven^[1]. Hij baseerde zich daarbij volledig op de mechanica, waardoor de resulterende methode in principe voor elk (lineair elastisch) materiaal is te gebruiken.

tabellen in zijn standaardwerk *Theory of elastic stability*^[4]. Tegenwoordig kunnen eindige-elementenpakketten dat monnikenwerk snel uitvoeren.

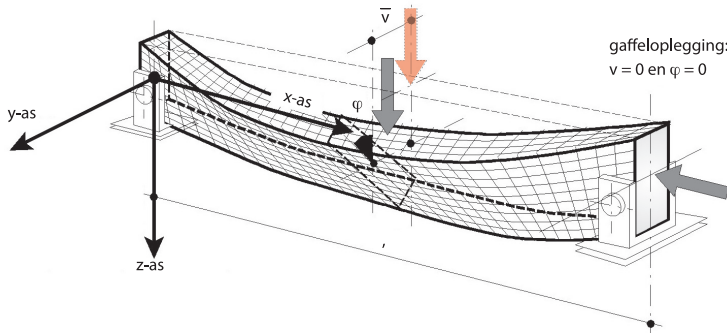
Tot voorbij de helft van de vorige eeuw concentreeerde het onderzoek zich op het vinden van de 'eigenwaarde' van de constructie: de belasting waarbij de constructie haar stabiliteit verliest. Het is echter bekend dat het stabiliteitsgedrag van staven niet perfect voldoet aan de theoretische stabiliteitsgrens. Overschrijding van de sterkte door knik treedt eerder op dan met de Eulerse knikformule zou worden voorspeld. In de jaren zestig van de vorige eeuw introduceerde prof. ir. D. Dicke in Nederland daarom de term n : de verhouding tussen de Eulerse druksterkte en de rekenwaarde van de drukbelasting^[5]. Met de vergrotingsfactor $n/(n-1)$ kan niet uitsluitend de uiteindelijke vervorming eenvoudig worden berekend, ze dient ook als waarschuwingssignaal: als n te dicht tot 1 nadert, dreigt instabiliteit. Een kleine verandering van de belasting kan dan leiden tot een grote toename van de verplaatsingen.

ir. F.P. Bos

Freek Bos is civiel ingenieur, freelance vakjournalist en promovendus aan de TU Delft.

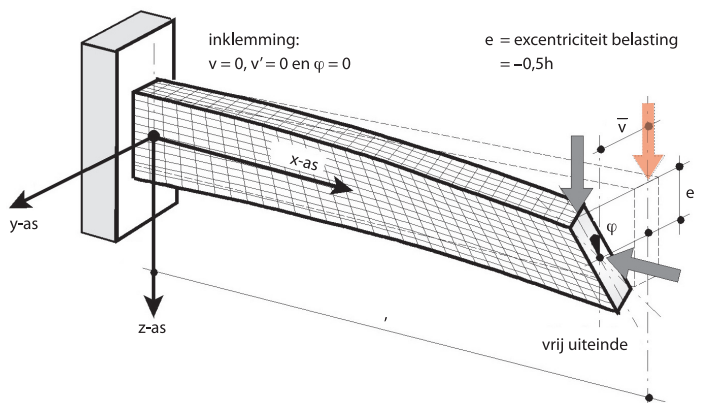
1. Beschouwde staftypen in driedimensionale weergave.

ligger op twee steunpunten



gaffeloplegging:
 $v = 0$ en $\varphi = 0$

uitkragende ligger



Tabel 1. Beschouwde combinaties van staftypen en belastinggevallen.

rechte staven	• op twee steunpunten • uitkragingen	al dan niet zijdelings gesteund
belast door	• constant moment, óf • een gelijkmatig verdeelde belasting, óf • een geconcentreerde last	in alle gevallen gecombineerd met een axiale drukkracht

Introductie van n^*

Uit het proefschrift van Raven blijkt dat kip op een vergelijkbare manier te beschrijven is. Raven introduceert daartoe de term n^* , die verwant is aan de bekende factor n , maar niet is geformuleerd in termen van kracht, maar als de verhouding tussen de uiteindelijke vervorming en het aandeel van het tweede-orde effect daarin:

$$n^* = \frac{\text{eindvervorming}}{\text{aandeel 2e-orde in vervorming}} \quad (2)$$

Met de factor n^* kunnen staven gemakkelijk op sterkte en stijfheid worden getoetst. Naast n^* zijn ook enkele correctiefactoren geïntroduceerd. Hiermee zijn de verschillen tussen een constant moment over de gehele lengte van de staaf en andere momentverdelingen verdisconteerd. Raven baseerde de afleiding van zijn methode en de gebruikte formules op berekeningen van de uiteindelijke vervorming met een iteratiemethode in een spreadsheet programma. Vervolgens controleerde hij de resultaten door toepassing van het principe van virtuele vormverande-

lingsarbeid in combinatie met numerieke berekeningen. Het proefschrift behandelt een aantal veel voorkomende combinaties van opleggingen en belastingen, die zijn weergegeven in tabel 1 en afbeelding 1, 2 en 3. Het onderzoek beperkt zich tot dubbelsymmetrische doorsneden, maar verwacht mag worden dat de gepresenteerde methode ook voor andere doorsneden toepasbaar is, eventueel onder aanpassing van enkele correctiefactoren. In de berekeningen zijn de aannames gedaan die gangbaar zijn bij lineair-elastische berekeningen: er is een lineair verband tussen spanningen en vervormingen, vlakke doorsneden blijven vlak en axiale verkorting en dwarskrachtvervorming worden verwaarloosd.

Controle van stabiliteit en sterkte

Uit de mechanica zijn de volgende gekoppelde differentiaalvergelijkingen afgeleid:

$$\begin{cases} EI_y w'' + F_c w = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} EI_z v'' + F_c v + M_{y1} \varphi = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{y1} v' + M_{x2} - GI_t \varphi' = 0 & (5) \end{cases}$$

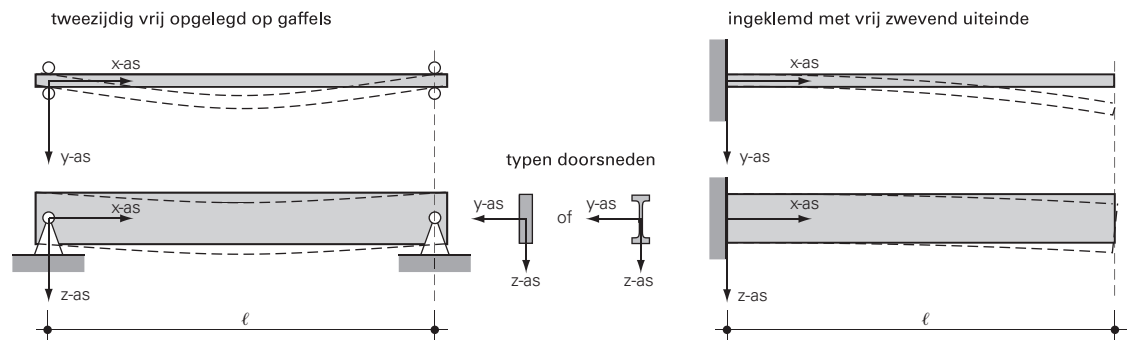
De eindvervorming van een staaf kan in twee richtingen worden ontbonden, in de sterke richting (buiging om de y -as, geeft verplaatsing w in het x,z -vlak) en in de zwakke richting (buiging om de sterke z -as, geeft verplaatsing v in het x,y -vlak). Evenzo kan de term n^* worden ontbonden in n_y^* (sterk) en n_z^* (zwak). In het onderzoek is aangetoond dat de verplaatsingen in de sterke richting w een verwaarloosbare invloed hebben op de kipstabiliteit. Van belang is daarom vooral de term n_z^* , als de sleutel voor tweede-orde effecten. Overigens gaat het in alle formules om de topwaarden, dus bijvoorbeeld de hoogste waarde van de vervorming over de lengte van de staaf.

$$n_z^* = \frac{\bar{v}}{\bar{v}_2} \quad (6)$$

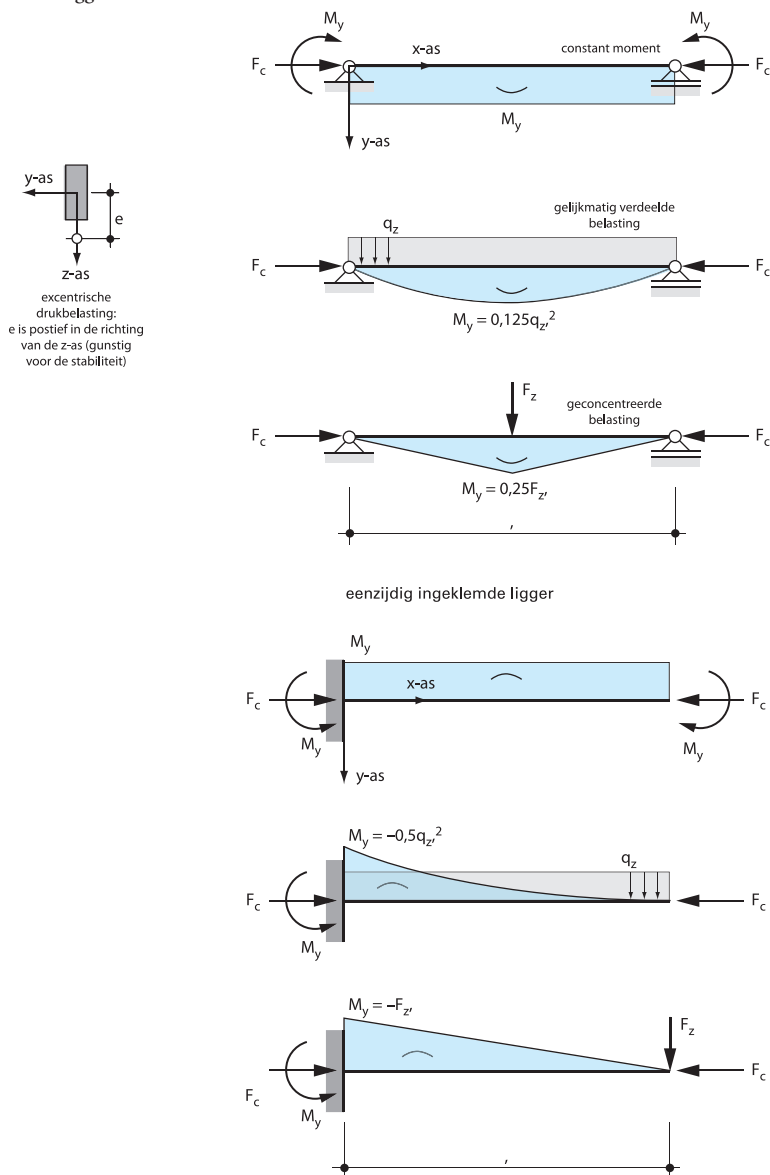
De eindvervorming $\bar{v}$ in de zwakke richting is gelijk aan de som van de initiële vervorming, de eerste-orde vervorming en de tweede-orde vervorming:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \quad (7)$$

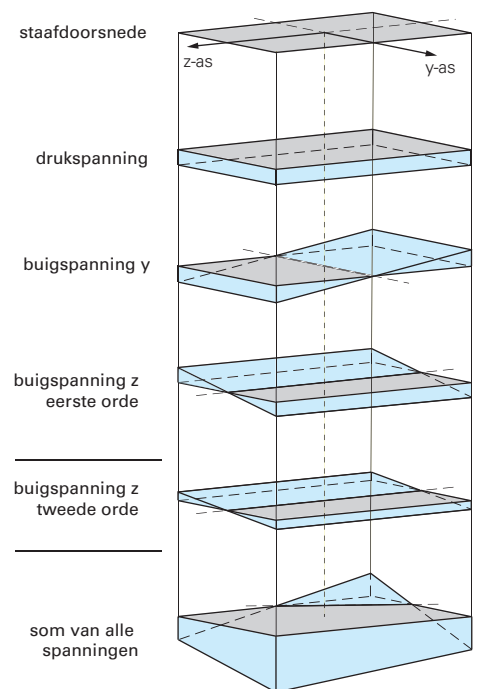
2. Beschouwde staافتypen
in boven- en zijaanzicht.



3. Beschouwde
belastinggevallen.



4. Beschouwde belastinggevallen;
superpositie van belastinggevallen.



De initiële vervorming wordt bepaald door imperfecties en kan worden gemeten of worden bepaald met normen. De eerste-orde vervorming is eenvoudig te berekenen, maar zal in veel gevallen gelijk zijn aan nul, omdat in de zwakke richting doorgaans geen belastingen werken. Er resteert:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}_2$$

De tweede-orde vervorming is dan de belangrijkste onbekende.

Door de introductie van n_z^* kan de eindvervorming ook geformuleerd worden als het product van de vergrotingsfactor $n_z^*/(n_z^* - 1)$ en de initiële vervorming $\bar{v}_0$:

$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{v}_0}{n_z^* - 1} \quad (8)$$

De term n_z^* kan als volgt worden berekend:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{n_{zM}^*} + \frac{1}{n_{zF}^*} \quad (9)$$

$$\frac{1}{n_{zM}^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} \quad (10)$$

$$\frac{1}{n_{zF}^*} = \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (11)$$

Hierin is:

M_{kr} klassieke theoretisch elastische kippmoment;

$k_{1,2}$ correctiefactoren voor staftype en belastinggeval.

Met formule (10) en (11) kunnen n_{zM}^* en n_{zF}^* direct worden berekend uit de staaf- en belastinggegevens (eerste-orde). Met formule (9) volgt hieruit de waarde voor n_z^* .

De stabiliteit kan direct worden getoetst: de kritische knik en/of kippbelasting treedt op als $n_z^* = 1$. Maar ook wanneer de waarde voor n_z^* dicht bij 1 komt, dient men gealarmeerd te zijn. Een kleine verandering van de krachten en momenten kan dan tot een grote verplaatsing leiden. Wanneer de eindvervorming $\bar{v}$ wordt berekend door n_z^* in te vullen in formule (8), blijkt dit ook. Het aandeel van de tweede-orde in de eindvervorming kan eventueel nog worden bepaald met formule (12).

$$\bar{v}_2 = \frac{k_3 \bar{M}_{z2} \ell^2}{\pi^2 EI} \quad (12)$$

Vervormingen van een ligger uit het vlak van de belasting leiden tot extra spanningen in de uiterste hoekvezels van de doorsnede (afb. 4). Het totale moment om de z-as ($\bar{M}_{z,tot}$), dat nodig is om deze spanningen te kunnen berekenen, wordt bepaald door de som van het eerste- en tweede-orde moment en eventueel tweemaal het flensmoment (bijvoorbeeld bij stalen I-profielen).

$$\bar{M}_{z,tot} = \bar{M}_{z2} + (\bar{M}_{z1,tot} + 2\bar{M}_{z2,flz}) \quad (13)$$

Het flensmoment, vergelijkbaar met NEN 6770, art. 11.2.5, volgt uit:

$$\bar{M}_{z2,fl} = \frac{F_{Ez} h \bar{M}_{z2}}{4 \bar{M}_{y1}} \cdot \frac{n_z^*}{n_{zM}^*} \quad (14)$$

Het tweede-orde moment kan weer worden berekend met behulp van de term n_z^* . Uit formules (1), (8) en (12) volgt:

$$\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez} \bar{v}_0}{k_3 (n_z^* - 1)} \quad (15)$$

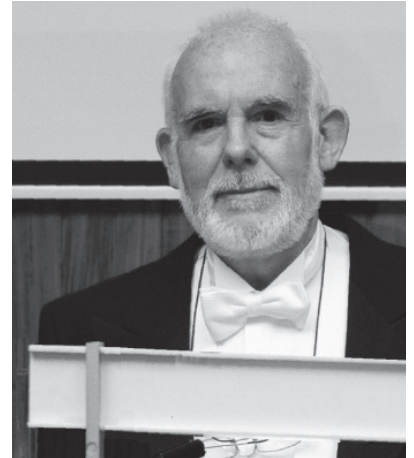
Ten slotte kunnen de sterkte en stabiliteit in de uiterste grenstoestand worden getoetst met een eenheidscontrole (unity check):

$$\frac{F_c}{F_u} + \frac{M_{y1}}{M_{yu}} + \frac{M_{z,2}}{M_{zu}} \leq 1 \quad (16)$$

Een voorbeeld van een stalen balk, belast met een axiale drukkracht en een puntlast in het midden van de overspanning, is op te halen van www.bouwenmetstaal.nl onder wetenschappelijke artikelen.

Conclusie

Door het introduceren van een handige term n^* waarvan de waarde met eenvoudige lineaire berekeningen kan worden bepaald, hoeft het toetsen van een staaf op kip geen onoverzichtelijke, tijdrovende bezigheid meer te zijn. De term heeft een duidelijke signaalfunctie: nadert de waarde tot 1, wees dan alert! Ook de spanningscontrole kan hiermee redelijk eenvoudig uitgevoerd worden, en de methode kan voor elk materiaal worden ingezet. •



Willem Jan Raven werd geboren op 1 juli 1938. Hij volgde bouwkunde opleidingen aan de HTS in Utrecht en de Technische Hogeschool (TH; nu TU) in Delft, waar hij in architectuur en bouwtechniek afstudeerde. Vervolgens werkte hij bij twee architecten- en ingenieursbureaus. In het onderwijs heeft hij een lange staat van dienst. Al tijdens zijn studie aan de TH begon hij als assistent-docent aan de HTS. Ook tijdens zijn in de praktijk werkzame periode bleef hij doceren. Van 1982 tot 2003 richtte hij zich volledig op het onderwijs aan de TU Delft en de HTS Rotterdam. Hij promoveerde in mei 2006, drie jaar na zijn pensionering. Willem Jan Raven is ook al meer dan twintig jaar adviseur bouwkunde en akoestiek voor de Commissie Orgelzaken van de Protestantse Kerk Nederland.

Literatuur

1. W.J. Raven, *Nieuwe blik op kip en knik, stabiliteit en sterkte van staven*, uitgave in eigen beheer, ISBN 90-9020566-7, Linschoten 2006.
2. P. van Musschenbroek, *Introductio ad cohaerentiam corporum firmiterum*, Leiden 1729.
3. L. Euler, *De curvis elasticis*, Lausanne/Geneve 1744.
4. S.P. Timoshenko en J.M. Gere, *Theory of elastic stability*, New York 1961 (2^e editie).
5. D. Dicke, diverse artikelen over stabiliteit in *Cement*, jaargang 1961 t/m 1972.
6. W.F. Chen, T. Atsuma, *Theory of beam-columns, vol. 2. Space behavior and design*, New York, 1977.
7. N.S. Trahair, *Flexural-torsional buckling of structures*, Londen, 1993.