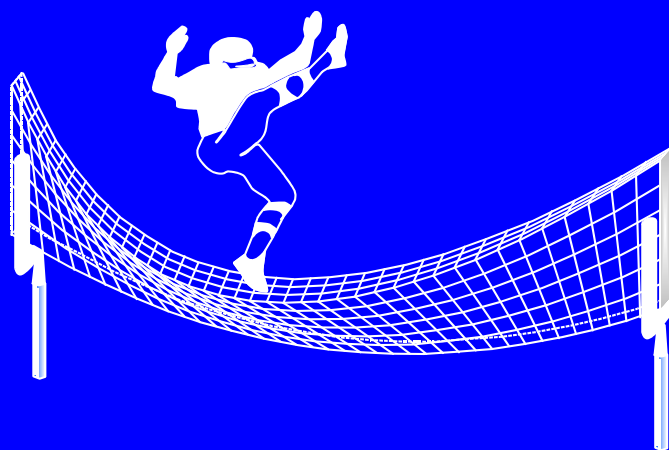


NIEUWE BLIK OP KIP EN KNIK

stabiliteit en sterkte van staven



Willem Jan Raven

NIEUWE BLIK OP KIP EN KNIK

stabiliteit en sterkte van staven

Proefschrift

ter verkrijging van de graad van doctor
aan de Technische Universiteit Delft,
op gezag van de Rector Magnificus prof. dr. ir. J.T. Fokkema,
voorzitter van het College voor Promoties,
in het openbaar te verdedigen

op dinsdag 30 mei 2006 om 12.30 uur

door

Willem Jan RAVEN

bouwkundig ingenieur
geboren te Ede

Dit proefschrift is goedgekeurd door de promotoren:

Prof. dr. ir. J. Blaauwendraad
Prof. dipl.-ing. J.N.J.A. Vamberský

Samenstelling promotiecommissie:

Rector Magnificus, voorzitter	
Prof. dr. ir. J. Blaauwendraad,	Technische Universiteit Delft, promotor
Prof. dipl.-ing. J.N.J.A. Vamberský,	Technische Universiteit Delft, promotor
Prof. dr. dipl.-ing. H.J. Blaß,	Technische Universität Karlsruhe
Prof. ir. F.S.K. Bijlaard,	Technische Universiteit Delft,
Prof. dr. ir. J.G.M. Kerstens,	Technische Universiteit Eindhoven
Prof. ir. H.H. Snijder,	Technische Universiteit Eindhoven

Raven, W.J.
Nieuwe blik op kip en knik,
Stabiliteit en sterkte van staven

Dissertatie Technische Universiteit Delft, 2006

ISBN-10: 90-9020566-7

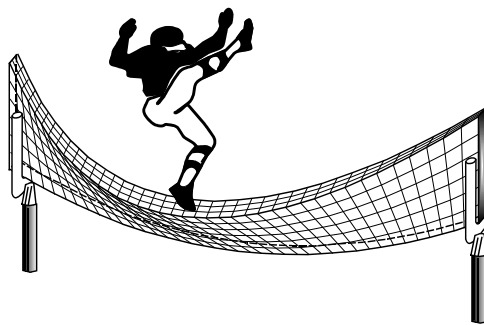
ISBN-13: 978-90-9020566-3

NUR: 929, 955, 956 Mechanica, Bouwkunde, Civiele techniek.

Trefwoorden: draagconstructies, staven, balken, kolommen, stabiliteit, sterkte, stijfheid,
kip, knik, doorbuiging, torsie, hout, staal, beton

© 2006 W.J. Raven, Linschoten, Alle rechten voorbehouden.

druk: Selection - print & mail, Woerden



Door de liefde van anderen komt een mens tot leven
en door de stimulansen, waardering en kritiek van zijn omgeving komt een mens tot ontplooiing,
want 'niemand leeft voor zichzelf alleen'.

Aan mijn ouders, echtgenote, kinderen en kleinkinderen:
Jan[†], Geurtje[†], Hanne, Ingrid, Marilyn, Berry, Anouk.



Waarover praatten zij, die elf daar op die balk ?

*Op hun gemak en met de voeten bungelend boven de skyline van New York eten deze durfallen
ontspannen hun lunchtrommeltje leeg.
Zonder hoogtevrees en vast helemaal geen vermoeden van kipinstabiliteit.*

*bouw Rockefeller Center 1932
foto: Charles Ebbets (1905-1978)*



Inleiding

aanleiding tot - en doel van het onderzoek

Bij het ontwerpen, berekenen en controleren van overspanningsconstructies moet altijd een optimale keuze worden gemaakt tussen tijdbesteding en nauwkeurigheid. De bepaling van de stabiliteit, stijfheid en sterkte van op buiging en/of op druk belaste staven, als onderdeel van deze constructies, bevat onder meer een analyse van kip- en/of knikverschijnselen met de daaruit volgende 2^{de}-orde effecten van vergroting van vervormingen en spanningen. Dit leidt tot ingewikkelde berekeningen waarbij een efficiënte combinatie van eenvoud en nauwkeurigheid meestal niet goed mogelijk is. In de loop der jaren zijn er echter op basis van kennis en ervaring diverse geavanceerde methoden ontwikkeld waarmee het gedrag, van zowel totale constructies als onderdelen daarvan, betrouwbaar gesimuleerd kan worden.

Waarom dan toch een nieuwe benadering van deze problematiek?

Het antwoord op deze vraag komt voort uit de ervaring dat het gebruiken van door anderen aangeleverde hulpmiddelen (zoals computerprogramma's, gecompliceerde formules, tijdbesparende tabellen en grafieken) weliswaar snel tot resultaten kan leiden, maar dat deze bezigheden zeker geen garantie bieden tegen foutieve invoer van de nodige gegevens. Helaas bieden ze zelden een goed inzicht in het werkelijke gedrag van overspanningsconstructies. Bovendien zijn bij het ontwerpen van deze constructies de belangrijkste gegevens (zoals de grootte van overspanningen en de in rekening te brengen belastingen en de materiaal-eigenschappen) vaak al wel in hoofdzaak bekend, maar de juiste schematisering, de afmetingen van de doorsneden en de detaillering nog niet.

Omdat alle gebruikelijke, gecompliceerde berekeningsmethoden mede gebaseerd zijn op bekend veronderstelde constructieve gegevens zijn zij in principe vooral geschikt als controle instrument.

Toch zal eerst iemand vooraf deze doorsneden moeten schatten. Juist dan kan een zo eenvoudig en overzichtelijk mogelijke berekening behulpzaam zijn als ontwerp-instrument en behoeft men (bij een verkeerde voorlopige schatting) er niet voor terug te schrikken die berekening nog eens over te doen.

Het is dus te verwachten dat een eenvoudige doch betrouwbare berekeningsmethode, waarbij geen bijzondere hulpmiddelen nodig zijn, kan bijdragen tot inzicht in het gedrag en dus ook tot tijdbesparing bij het ontwerpen en berekenen van draagconstructies en onderdelen daarvan.

Deze studie is begonnen met een poging om de stabiliteitsformules van de Nederlandse norm NEN 6760 - Houtconstructies TGB 1990 toegankelijk te maken via tabellen en grafieken. Bij nadere analyse blijken de normen NEN 6760 - Houtconstructies, NEN 6770 en 6771 - Staalconstructies en Eurocode EC5 - Design of timber structures, ondanks grote verschillen in toe te passen rekenregels, gebaseerd te zijn op dezelfde uitgangspunten. Deze zijn echter zo ver uitgewerkt dat de resulterende formules alleen efficiënt zijn op te lossen met speciale computerprogramma's. Op zichzelf behoeft dat geen bezwaar te zijn, maar de kans is (te) groot dat de verantwoordelijke constructeur hierbij nauwelijks meer inzicht houdt in de logica van deze formules en de bijbehorende factoren en coëfficiënten en aldus 'door de bomen het bos niet meer ziet'.

Daarom een poging om het stabiliteitsgedrag van staven opnieuw duidelijk te maken en tijdig te stoppen met het verder uitwerken van de nodige formules voordat ze te ingewikkeld worden met deze 'nieuwe blik op kip en knik'.



Inhoud

Inleiding, aanleiding tot, en doel van, het onderzoek	7
Inhoud	9
1 Samenvatting	13
1a Summary	19
2 Beknopt overzicht van de ontwikkeling van het stabiliteitsonderzoek van staven ..	25
3 Uitgangspunten	29
3.1 Staaftypen, belastingen en randvoorwaarden	29
3.2 Notaties en tekenafspraken	32
3.2.1 Notaties	32
3.2.2 Tekenafspraken	35
3.3 Overige aannamen	36
4 Basisvergelijkingen en berekeningsmethoden	39
4.1 Vervormingen	39
4.2 Interactie tussen krachten, momenten en vervormingen	42
4.3 Berekeningsmethoden	48
5 Iteratiemethode - stappenplan	51
5.1 Staaf op twee steunpunten	53
Staaf op twee steunpunten, belast door een axiale drukkracht en een:	
5.1.1 Constant moment	53
5.1.2 Gelijkmatic verdelde belasting	57
5.1.3 Geconcentreerde belasting in het midden van de staaf	64
5.2 Uitkraging	69
Uitkraging, belast door een axiale drukkracht en een:	
5.2.1 Constant moment	72
5.2.2 Gelijkmatic verdelde belasting	74
5.2.3 Geconcentreerde belasting op het staafeind	80
5.3 Staaf, belast door een willekeurige belastingcombinatie	84

6	Analytische methode met differentiaalvergelijkingen en vormveranderingsarbeid	87
6.1	Staaaf op twee steunpunten	89
	Staaaf op twee steunpunten, belast door een axiale drukkracht en een:	
6.1.1	Constant moment	89
6.1.2	Gelijkmatig verdeelde belasting	92
6.1.3	Geconcentreerde belasting in het midden van de staaaf	95
6.2	Uitkraging	98
	Uitkraging, belast door een axiale drukkracht en een:	
6.2.1	Constant moment	98
6.2.2	Gelijkmatig verdeelde belasting	98
6.2.3	Geconcentreerde belasting	103
7	Staven met zijdelings steunverband	105
7.1	Star steunverband in de trekzone van de staaaf	105
7.1.1	Mogelijke vereenvoudigingen	108
7.1.2	Belasting door alleen een axiale drukkracht	109
7.1.3	Belasting door een gelijkmatig verdeelde belasting	112
7.1.4	Grootte van de reactiekracht	113
7.2	Uitkragingen met steunverband in de trekzone	114
7.3	Invloed van de 2 ^{de} -orde effecten op het draagvermogen	118
8	Toets op sterkte en stijfheid	119
8.1	Toetsprocedure	119
8.2	Toetsen van de sterkte in de UGT	120
8.2.1	Staven op twee steunpunten met gaffelopleggingen	123
8.2.2	Staven op twee steunpunten met inklemmingen	128
8.2.3	Doorgaande staven op meer steunpunten	129
8.2.4	Uitkragingen	130
8.3	Toetsen van de stijfheid in de BGT	138
8.4	Vergelijking met toetsen volgens de Eindige-elementenMethode	141
9	Normen op één noemer	143
9.1	NEN 6760 TGB 1990 Houtconstructies	144
9.2	EC 5 prEN Design of timber structures	152
9.3	NEN 6770 TGB 1990 Staalconstructies	158
9.4	NEN 6771 TGB 1990 Staalconstructies - stabiliteit	160
9.5	NEN 6720 TGB 1990 Voorschriften beton	165
9.6	Conclusies	166
10	Toepassing, conclusies en aanbevelingen	167
10.1	Toepassing	167
10.1.1	Overzicht	167
10.1.2	Rekenvoorbeelden	171
10.2	Conclusies	176
10.3	Aanbevelingen	176
11	Literatuuroverzicht	177

BIJLAGEN	183
B1 Literatuurverkenning	185
B2 Rechte staven belast op centrische druk	227
B2.1 Vervorming onder invloed van druk	227
B2.2 Bepaling knikfactor	231
B2.3 Vergelijking van kolommen in hout, staal en beton	234
B3 Torsiestijfheid	239
B3.1 Torsiemoment en torsiestijfheid	239
B3.2 Invloed van de welvingsstijfheid op de rotatie	245
B3.3 Resultaten berekeningen	248
B3.3.1 Staaf op twee steunpunten met gaffelopleggingen	249
B3.3.2 Staaf op twee steunpunten met inklemmingen	254
B3.3.3 Uitkraging met gaffeloplegging	261
B3.3.4 Uitkraging met inklemming	263
B3.4 Conclusies met betrekking tot torsie	271
B4 Invloed op de kipstabiliteit van de vervorming in de 'sterke' richting en dwarsbelasting in de 'zwakke' richting	273
B5 Uitwerking iteratiemethode - stappenplan	281
B5.1 Staaf op twee steunpunten	281
Staaf op twee steunpunten, belast door een axiale drukkracht en een:	
B5.1.1 Constant moment	283
B5.1.2 Gelijkmatic verdelde belasting	283
B5.1.3 Geconcentreerde belasting in het midden van de staaf	292
B5.2 Uitkraging	300
Uitkraging, belast door een axiale drukkracht en een:	
B5.2.1 Constant moment	300
B5.2.2 Gelijkmatic verdelde belasting	301
B5.2.3 Geconcentreerde belasting op het eind van de staaf	305
B6 Uitwerking analytische methode	311
B6.1 Staaf op twee steunpunten	312
Staaf op twee steunpunten, belast door een axiale drukkracht en een:	
B6.1.1 Constant moment	312
B6.1.2 Gelijkmatic verdelde belasting	312
B6.1.3 Geconcentreerde belasting (puntlast) in het midden van de staaf	316
B6.2 Uitkraging	318
Uitkraging, belast door een axiale drukkracht en een:	
B6.2.1 Constant moment	319
B6.2.2 Gelijkmatic verdelde belasting	319
B6.2.3 Geconcentreerde belasting (puntlast) op het eind van de staaf	320

B7	Zijdelings gesteunde staven	321
B7.1.	Negatieve invloed van het steunverband	321
B7.2	Staven met verend steunverband	327
	Verend steunverband in de:	
B7.2.1	Trekzone	331
B7.2.2	Neutrale lijn	334
B7.2.3	Drukzone	334
B8	De Eindige-Elementen-Methode toegepast bij kip en knik van houten liggers	337
B8.1	Elementennet	337
B8.2	Proefberekeningen	337
B8.2.1	Verwachtingswaarde volgens handberekening	338
B8.2.2	EEM-berekeningen	339
B8.2.3	Voorlopige conclusies	340
B8.3	Rekenresultaten	342
B8.4	Conclusies	345
B9	Diversen	347
B9.1	Voorlopige schatting van de 2 ^{de} -orde vervorming	347
B9.2	Componenten van n^*	348
B9.3	Maatgevende situatie	349
	Curriculum vitae	353
	Tenslotte	354

Hoofdstuk

1

Samenvatting

**Nieuwe blik op kip en knik
Stabiliteit en sterkte van staven*****Knik- en kipstabiliteit***

De berekening van de stabiliteit van op druk en buiging belaste staven is een van de lastige problemen in de mechanica. Dit geldt niet zozeer voor twee-dimensionale knikgevallen (waarover zeer veel bekend is), maar vooral wanneer er kans is op verlies van stabiliteit bij het uitbuigen van een belaste staaf in de 'zwakke' richting, loodrecht op zijn buigingsvlak. Dit verschijnsel, dat bekend staat onder de naam 'kipinstabiliteit', gaat gepaard met zijdelingse verplaatsingen in twee richtingen en rotaties van de doorsneden die elkaar allemaal beïnvloeden. Hoewel de interactie tussen belasting, vervormingen en spanningen goed kan worden beschreven door het opstellen van drie gekoppelde differentiaalvergelijkingen is het oplossen daarvan, behalve in enkele zeer eenvoudige gevallen, wiskundig analytisch alleen bij benadering mogelijk. Speciale numerieke programma's moeten dan uitkomst bieden. In Hoofdstuk 2 wordt een beknopt overzicht gegeven van de vele studies die in de loop der jaren over kip- en knikstabiliteit zijn gepubliceerd.

Analyse van stabiliteit door berekening van 2^{de}-orde effecten

In deze dissertatie wordt het stabiliteitsgedrag van staven inzichtelijk gemaakt in enkele duidelijk te onderscheiden stappen. Daarbij wordt onderscheid gemaakt in berekening van de 1^{ste}-orde, waarbij reacties en vervormingen rechtstreeks uit de belastingen worden afgeleid, en die van de 2^{de}-orde waarbij de vervormingen extra reacties veroorzaken en zodoende gedeeltelijk door zichzelf worden veroorzaakt.

Na het definiëren van de notaties (waaronder enkele nieuw in te voeren factoren) en de tekenafspraken (in overeenstemming met wat gangbaar is in de mechanica) in Hoofdstuk 3 worden in Hoofdstuk 4 de relaties tussen belastingen en vervormingen geanalyseerd. Deze relaties resulteren in drie gekoppelde differentiaalvergelijkingen voor de drie vrijheidsgraden van een staaf, betreffende de verplaatsingen (loodrecht op de staafas) en de rotatie van de doorsnede, overeenkomstig met wat in de literatuur wordt aangetroffen. Aangevoerd wordt dat de eerste van deze drie vergelijkingen (betreffende de vrijheidsgraad van verplaatsing in de 'sterke' richting) een verwaarloosbare invloed heeft op de andere twee en daarom veilig kan worden ontkoppeld.

Van beslissende betekenis is de nieuw geïntroduceerde term n^* die, anders dan de, bij stabiliteitsberekeningen, gebruikelijke 2^{de}-orde term n , wordt gedefinieerd als:

$$n^* = \frac{\text{eindvervorming}}{\text{aandeel van de 2^{de}-orde in de vervorming}}$$

Hierbij wordt onderscheid gemaakt in vervormingen in de beide hoofdrichtingen loodrecht op de staafas.

De bepaling van n_z^* (volgend uit de vervormingen in de 'zwakke' richting) doet dienst als de sleutel om op een zeer efficiënte en overzichtelijke manier de 2^{de}-orde effecten te berekenen.

Zeer belangrijk is de 'alarmfunctie' die de term n^* kan vervullen bij het beoordelen van het stabiliteitsgedrag van staven. Deze mogelijkheid is weliswaar niet onbekend maar komt bij bepalingen over kipstabiliteit in de geraadpleegde normen niet voor.

Staaftypen en belastinggevallen

Beschouwd worden rechte staven:	- op twee steunpunten en - uitkragingen	al dan niet zijdelings gesteund
Belast met een:	- constant moment of: - een gelijkmatig verdeelde belasting of: - een geconcentreerde last	in alle gevallen gecombineerd met een axiale drukkracht.

Iteratiemethode

In Hoofdstuk 5 wordt met behulp van een iteratieproces in negen stappen een complete cyclus doorlopen van:

- 1 - keuze van de vorm en de grootte van de uitbuiging in de 'zwakke' richting,
- 2 - bepalen van het torsiemoment,
- 3 - bepalen van de rotatie,
- 4 - hieruit afleiden van de 2^{de}-orde momenten,
- 5 - bepalen van de kromming van de staaf,
- 6 - hieruit afleiden van de grootte en de vorm van de 2^{de}-orde vervormingen,
- 7 - berekenen van de eindvervormingen door superpositie,
- 8 - vergelijken of het resultaat overeenstemt met de in stap 1 gedane aanname,
- 9 - bij voldoende overeenstemming: bepalen van n_z^* .

Dit proces wordt voor de genoemde belastinggevallen iteratief uitgevoerd in een spreadsheetprogramma.

Om voor nieuwe belastinggevallen n_z^* op een eenvoudige manier te kunnen berekenen wordt een algemene formule ontwikkeld. De nodige factoren hiervoor worden ontleend aan de resultaten van de spreadsheetberekening.

De 2^{de}-orde term

Alle benodigde gegevens betreffende belasting, excentriciteit en factoren, afhankelijk van de aard van de belasting en de eigenschappen van de staaf, zijn verwerkt in de algemene formule:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{n_{zM}^*} + \frac{1}{n_{zF}^*}$$

Hierin zijn:

$$\frac{1}{n_{zM}^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}}$$

betrokken op de invloed van de buigende momenten,

$$\frac{1}{n_{zF}^*} = \frac{F_c}{F_{Ez}}$$

betrokken op de invloed van de axiale drukkracht.

De definities van de hier ingevoerde termen en constanten zijn opgenomen in de lijst met notaties in Hoofdstuk 3 en verantwoord bij de afleidingen van de formules in Hoofdstuk 5. De factoren k_1 en k_2 zijn afhankelijk van de combinatie van staafstype en belastinggeval.

In Hoofdstuk 6 wordt dezelfde formule ontwikkeld volgens een methode die is gebaseerd op het principe van de virtuele vormveranderingsarbeid, waarbij dezelfde waarden worden gevonden als in Hoofdstuk 5.

In Hoofdstuk 7 volgt een beschouwing over staven met een zijdelings steunverband, waarbij voor de term n_z^* aangepaste formules worden ontwikkeld. In Bijlage 7 wordt op enkele bijzondere onderwerpen, zoals verende steunverbanden, nader ingegaan.

Vervormingen en momenten van de 2^{de}-orde

Met behulp van n_z^* en de in rekening te brengen initiële vervorming \bar{v}_0 (die bijvoorbeeld is te ontleen aan de betreffende normen) wordt in Hoofdstuk 8 de 2^{de}-orde vervorming \bar{v}_2 bepaald met:

$$\bar{v}_2 = \frac{1}{n_z^* - 1} \bar{v}_0$$

De relatie tussen het 2^{de}-orde moment in de 'zwakke' richting \bar{M}_{z2} en de verplaatsing \bar{v}_2 is te schrijven als:

$$\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez}}{k_3} \bar{v}_2$$

waarin de factor k_3 afhankelijk is van de combinatie van staafstype en belastinggeval.

Toetsen van stabiliteit, sterkte en stijfheid

De veiligheid in de UGT (uiterste grenstoestand) wordt beoordeeld door te toetsen of is voldaan aan de te stellen eisen. Na superpositie van alle invloeden volgt (rekening houdend met de buig- en druksterkte van de staaf) als sterktetoets de zogenoemde UC (unity-check):

$$\frac{F_c}{F_u} + \frac{\bar{M}_{y1}}{M_{yu}} + \frac{\bar{M}_{z2}}{M_{zu}} \leq 1$$

Hierin is de stabiliteit 'automatisch' verdisconteerd.

Bij uitkragingen treden de maximale momenten in beide richtingen meestal niet op in dezelfde doorsnede zodat dan soms nog een kleine reductie mogelijk is.

Als (in zeldzaam voorkomenden gevallen) er bovendien een belasting optreedt in de 'zwakke' richting en/of de 2^{de}-orde vervorming in de 'sterke' richting niet verwaarloosbaar is, kunnen de betreffende componenten eenvoudig worden gesuperponeerd.

In Hoofdstuk 8 wordt tenslotte ook aangegeven hoe n_z^* kan worden toegepast om de optredende vervorming in de BGT (bruikbaarheidsgrenstoestand) te bepalen. De eindvervorming wordt berekend met:

$$\bar{v} = \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} \bar{v}_0$$

De toets in de BGT hiervoor is:

$$\bar{v} \leq \bar{v}_{\text{toelaatbaar}}$$

Onderscheid kan hierbij worden gemaakt tussen de totale eindvervorming en de bijkomende vervorming die optreedt nadat de constructie door alleen het eigen gewicht is belast.

Normen op één noemer

In Hoofdstuk 9 wordt de toepassing van deze methode vergeleken met de bepalingen in enkele voor de materialen hout, staal en beton geldende normen. Vooral wegens de zeer grote

overeenkomsten bieden de uitkomsten daarvan interessante mogelijkheden voor praktische toepassing.

In Bijlage 2 worden deze vergelijkingen gemaakt voor op druk belaste kolommen van hout, staal en beton. Ondanks de zeer grote verschillen waarmee knikgevallen in de betreffende normen worden behandeld, blijken zij allen op dezelfde manier, met toepassing van de term n_z^* of n_y^* , te kunnen worden berekend, met praktisch dezelfde resultaten.

Hoewel deze studie is begonnen met een poging om de bepaling van de kipstabiliteit van houten staven te vereenvoudigen, is het niet nodig de methode te beperken tot houtconstructies, maar kan ook het gedrag van draagconstructies in andere materialen (met soms enige aanvullingen) op geheel identieke wijze worden bepaald.

Nieuw resultaat van deze dissertatie

Bij het beoordelen van de knik- en kipstabiliteit van draagconstructies kan voor alle gangbare materialen dezelfde methodiek worden toegepast.

Bruikbaarheid

Hoofdstuk 10 bevat een compleet overzicht van de onderzochte staaftypen en belastinggevallen met alle te gebruiken formules, factoren en aanbevelingen voor toepassing.

Torsiestijfheid

Voor de bepaling van de torsiestijfheid van staven met rechthoekige doorsneden zijn voldoende gegevens bekend. Dit geldt vooral voor hout, maar ook voor beton, mits er een betrouwbare bepaling (of benadering) van de torsiestijfheid van (gescheurde) doorsneden wordt ingevoerd. Bij (stalen) I-profielen wordt extra aandacht besteed aan de grote invloed van de (belemmerde) welving van de doorsnede.

In Bijlage 3 wordt een methode ontwikkeld om de vrij gecompliceerde berekening van de torsiestijfheid (gebaseerd op de bijdragen van de zuivere wringing, de verhinderde welving van de doorsnede en de invloed van de normaalkracht) te vereenvoudigen. Dit is mogelijk door het invoeren van een vervangende effectieve torsiestijfheid GI_t , die in de formules betreffende de relatie van de torsievervorming ϕ en het torsiemoment M_t wordt opgenomen:

$$\phi' = \frac{M_t}{GI_t}$$

Hierdoor is het niet nodig om de rotatie meer dan eenmaal te differentiëren, wat (met behoud van nauwkeurigheid) een aanzienlijke vereenvoudiging van de op te lossen vergelijkingen oplevert.

Literatuur

In de loop der tijd is er veel onderzoek gedaan naar kipstabiliteit. Van de vele publicaties daarover is een beknopt overzicht opgenomen in Hoofdstuk 11. In Bijlage 1 wordt van de meest relevante aspecten daarvan een korte samenvatting gegeven. In het algemeen blijkt dit onderzoek vooral gericht te zijn op het vinden van de zogenoemde 'eigenwaarde' van de belasting waarbij de constructie de stabiliteitsgrens bereikt. Deze toestand is vergelijkbaar met de resultaten van de hier ontwikkelde methode als de term n^* nadert tot 1. Maar de consequenties daarvan, dat de constructie, zelfs bij een lagere belasting dan de 'eigenwaarde', al kan bezwijken door overschrijding van de sterkte, ontbreken daarbij veelal.

Bijzondere onderwerpen

Bijlage 4 bevat een analyse van de invloeden van de vervormingen in de 'sterke' richting. Hieruit blijkt dat deze vervormingen weliswaar een gunstig (maar zeer klein) effect hebben op de kipstabiliteit, dat veilig (en vooral tijdbesparend) kan worden verwaarloosd.

In Bijlage 8 zijn enkele resultaten vermeld van een afstudeeronderzoek over het onderhavige onderwerp aan de Faculteit CiTG (Civiele Techniek en Geowetenschappen) van de TU-Delft. Daarbij is een aantal houten staven doorgerekend met de EEM (Eindige-Elementen-Methode), die als een betrouwbare referentie is te beschouwen. De resultaten van de in deze dissertatie ontwikkelde methode met n_z^* blijken hiermee zeer goed overeen te stemmen.

Bijlage 9 bevat nog enkele hulpgrootheden en een beknopte beschouwing over de vraag welke te berekenen toestand maatgevend is. Wanneer vooraf betrouwbaar is te bepalen of de stabiliteit en de sterkte dan wel de stijfheid maatgevend is voor de betreffende staaf kan (veel) tijd worden bespaard door overbodige berekeningen achterwege te laten.

Inzicht en toepassing

In principe kunnen de berekeningen in korte tijd worden uitgevoerd met een eenvoudige zakrekenmachine, zonder dat daarbij uitgebreide tabellen, grafieken, spreadsheets of andere computerprogramma's nodig zijn.

Met opzet is er voor gekozen om de ontwikkelde formules niet (te) ver uit te werken, zodat de samenhang en de gang van zaken overzichtelijk blijft.

Door het stapsgewijs invullen van de nodige formules in een logische volgorde wordt het inzicht in het stabiliteitsgedrag bevorderd. Door de grootte van n^* wordt men tijdig en doeltreffend gewaarschuwd voor een dreigende overschrijding van de stabiliteitsgrens.

1a Summary

New vision on flexural-torsional buckling Stability and strength of structural members

Flexural-torsional buckling

The stability check of beam-columns loaded in compression and bending is one of the difficult problems in structural mechanics, not only for two-dimensional buckling phenomena (about which very much is known), but especially when there may be a chance of loss of stability due to deflection of a loaded member in the 'weak' direction normal to its plane of bending.

This phenomenon, which is known as flexural-torsional buckling, is accompanied by translations in two directions as well as rotation of the cross-section; moreover, these all interact. Although the interaction between load, deformations and stresses may be well described by the derivation of three coupled differential equations, their solution is, except in some very simple cases, mathematically only possible by approximation. Special numerical programs then must provide the answer to the problem. A brief survey of the numerous studies that have been published about flexural-torsional buckling in the course of the years is given in Chapter 2.

Analysis of stability through calculation of 2nd order effects

This thesis presents insight into the stability of members in a number of clearly distinct steps. Distinction is made between calculation of the 1st order, where reactions and deformations are directly derived from the loads, and calculation of the 2nd order, where the deformations cause extra reactions and thus are partly evoked by themselves.

After defining the notation (including some new factors) and the sign convention (in accordance with practice in structural mechanics) in Chapter 3, the relationships between loads and deformations are stated in Chapter 4. These result into three coupled differential equations for the three degrees of freedom of a beam-column, two translations and one rotation of the cross-section, corresponding to what is found in literature.

It is demonstrated that the first differential equation (regarding the degree of freedom in the 'strong' direction) has a negligible influence on the other two and therefore can safely be uncoupled.

Of decisive importance is the newly introduced symbol n^* that, in contrast to the well known 2nd order symbol n in conventional stability analysis, is defined as:

$$n^* = \frac{\text{total deformation}}{2^{\text{nd}} \text{ order part of deformation}}$$

Distinction is made between the deformation in the two main directions normal to the beam-column axis.

The determination of n_z^* (due to the displacement in the 'weak' direction) is the key to calculating 2nd order effects in an efficient and well-organized manner.

Very important is the 'alerting function' that n^* can fulfil when judging the stability of beam-columns. While this is known, it is not found in rules for flexural-torsional buckling in the design codes reviewed.

Beam-column types and load cases

Considered straight members:	- on two simple supports - cantilevers	whether or not supported laterally
Loaded by a:	- constant moment or: - a uniformly distributed load or: - a point load	in all cases combined with a compressive normal force

Iteration method

In Chapter 5 an iteration procedure is proposed, in which nine steps are passed through in each cycle:

- 1 - choice of the shape and magnitude of the deflection in the weak direction,
- 2 - determination of the twisting moment,
- 3 - determination of the rotation,
- 4 - from this deduction of 2nd order moments,
- 5 - determination of the member curvature,
- 6 - from this deduction of magnitude and shape of the 2nd order displacements,
- 7 - calculating of the total displacements by superposition,
- 8 - comparing the results with the choices made in step 1,
- 9 - if in agreement, determination of n_z^* .

The iteration procedure is done for all discussed load cases in a spreadsheet program. Hereafter a general formula for n_z^* is presented, which in a simple way is valid for the study of all load cases. The factors in this formula (differing per load case) are derived from a spreadsheet calculation.

The 2nd order factor

All necessary data concerning load, eccentricity and factors, depending on load case and bar properties, are covered by the general formula:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{n_M^*} + \frac{1}{n_F^*}$$

Herein:

$$\frac{1}{n_M^*} = \frac{(k_1 M_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 M_{y1} e F_{Ez}}$$
 reflects the influence of the bending moments,

$$\frac{1}{n_F^*} = \frac{F_c}{F_{Ez}}$$
 reflects the influence of the compressive normal force.

The definitions for these terms and constants are included in the list of notations in Chapter 3 and justified during the derivation of the formulas in Chapter 5.

The factors k_1 and k_2 are dependent on the combination of beam-column type and load case.

In Chapter 6 the same formula is derived using a method based on the principle of strain energy; this yields the same values as were found in Chapter 5.

Beam-columns with a lateral support are considered in Chapter 7. This requires adapted formulas for n_z^* . In Appendix 7 some special topics, for instance consequences of elastic lateral supports, are discussed.

Displacements and moments of 2nd order

With help of n_z^* and the applicable initial displacement v_0 (which may be adopted from the relevant design codes) the 2nd order displacements are determined in Chapter 8 using:

$$\bar{v}_2 = \frac{1}{n_z^* - 1} \bar{v}_0$$

The relationship between the 2nd order moment in the 'weak' direction and the displacement may be written as:

$$\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez}}{k_3} \bar{v}_2$$

in which the factor k_3 depends on the combination of beam-column type and load case.

Check of stability, strength and stiffness

The safety in the ULS (Ultimate Limit State; UGT in Dutch) is evaluated by checking if the requirements are met. After superposing all influences (accounting for the flexural strength and compression strength) a unity check is made:

$$\frac{F_c}{F_u} + \frac{\bar{M}_{y1}}{M_{yu}} + \frac{\bar{M}_{z1}}{M_{zu}} \leq 1$$

Herein the stability has been accounted for 'automatically'. In cantilever beams the maximum moments in both directions usually do not occur at the same cross-section so there may still be a small reduction. If (in rare cases) a load acts in the 'weak' direction and/or the 2nd order displacement in the 'strong' direction is not negligible, the relevant components may simply be added to the unity check.

Chapter 8 describes how n_z^* can be applied to calculate the displacement in the SLS (Serviceability Limite State; BGT in Dutch). The total displacement is calculated by:

$$\bar{v} = \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} \bar{v}_0$$

The requirement in SLS is:

$$\bar{v} \leq \bar{v}_{\text{permissible}}$$

A distinction can be made here between the total displacement and the additional displacement that occurs after the structure is subjected to its permanent or dead load.

Design codes reduced to a common denominator

In Chapter 9 the application of this method is compared with the rules in some current design codes for timber, steel and concrete. Because of the high degree of agreement, the results of the comparison offer particularly interesting possibilities for practical application.

In Appendix 2, comparisons are made for columns in compression in timber, steel and concrete. There are very large differences between the way, in which buckling cases are handled in the various design codes. It is shown that all design code cases can be calculated in a unified manner if n_z^* or n_y^* (as introduced in this thesis) are applied. The results are practically the same.

Although this study has started with an attempt to simplify the definition of lateral stability of timber beam-columns, it is not necessary to restrict the method to timber structures. It appears possible to determine the behaviour of structures consisting of other materials in a completely identical manner (sometimes with some small modifications).

New result of this thesis:

A unified methodology for flexural-torsional buckling is applicable for all existing construction materials in structural engineering.

Applicability

Chapter 10 contains a complete survey of the studied beam-column types and load cases with all formulas and constants to be used, including recommendations for their application.

Torsion stiffness

Sufficient data are available to define the torsion stiffness of members with rectangular cross-section, especially for timber and concrete, provided that a reliable calculation (or approximation) of the torsion stiffness of (cracked) bars is used. In case of (steel) I-beams extra attention is paid to the possibly significant influence of the (restrained) warping of the section.

Appendix 3 presents a method to simplify the rather complicated calculation (based on the contributions of Saint-Venant torsion, restrained warping of the cross-section and the influence of the compressive normal force) by using a replacing effective torsion stiffness GI_t , which is equivalent to the real more complicated situation. In the formulas this torsion stiffness defines the relation between the torsion ϕ and the twisting moment M_t :

$$\phi' = \frac{M_t}{GI_t}$$

In this way, it is not necessary to differentiate the rotation more than once, which yields a considerable simplification of the equations to be solved without loss of accuracy.

References

Many investigations on lateral buckling have been made in the past. A brief survey of the available literature is given in Chapter 11. A number of the most relevant aspects are discussed in Appendix 1. In general the research aims at finding the so-called eigenvalue of the load at which the structure reaches the limit at which stability is lost. This situation is comparable with the situation in the present investigation at which the 2nd order quantity n^* approaches the value of 1. However, the insight that the structure normally will collapse at a load lower than the eigenvalue has not been found in the literature.

Special topics

Appendix 4 contains an analysis of the effect of deformation in the 'strong' direction. Since it may have a positive influence on the lateral stability (be it very small), it can safely be neglected. This also saves computation time.

Appendix 8 summarizes some results of a relevant masters thesis at the Faculty of Civil Engineering and Geosciences of Delft University of Technology. A number of timber beam-columns have been calculated by using the Finite Element Method (FEM), which is considered to provide a reliable reference. The results of the developed n_z^* -method of this PhD thesis agree very well with the FEM results.

Appendix 9 contains some auxiliary quantities and a brief discussion about the question of whether strength or stiffness is decisive. When this can be reliably determined in advance for the member being considered, much time can be saved by omitting unnecessary calculations.

Insight and application

Essentially the calculations can be done in a short time using a pocket calculator, without the use of extensive tables, diagrams, spreadsheets or other computer programs. It has been deliberately chosen not to elaborate the derived formulas too far, in order to preserve a clear view on the cohesion and procedure. By using the necessary formulas in a stepwise way and logical order, the insight into stability behaviour is increased and thanks to the introduction of n^* the structural engineer is effectively warned in time when approaching the stability limit.

Hoofdstuk

2

Beknopt overzicht van de ontwikkeling van het stabiliteitsonderzoek van staven

De sterkte van een en hetzelfde hout, hebbende dezelfde dikte maar verscheidene lengte, staande loodrecht op, en van boven door zwaarte neergedrukt, is in ene omgekeerde reden van de vierkanten der lengten.

Petrus van Musschenbroek, Leiden 1729 [1] ¹

Sinds het onderzoek naar de draagkracht van staven, en de daaruit samengestelde overspanningsconstructies, is begonnen blijkt het kwadraat van de lengte een van de belangrijkste gegevens te zijn om de stabiliteit van gedrukte en gebogen staven te kunnen voorspellen.

Door Euler [2] werd in het midden van de 18^{de} eeuw ontdekt dat hierbij, naast de geometrie van de staafdoorsnede, ook de materiaalstijfheid een belangrijke rol speelt. Zijn bekende knikformule, gebaseerd op de interactie van belasting en vervorming, is nog steeds het belangrijkste uitgangspunt voor het opzetten van stabiliteitsberekeningen.

In de loop van de tijd bleek dat de formule van Euler evenwel niet toereikend is voor korte, gedrongen staven. Dit leidde tot nader experimenteel en theoretisch onderzoek hiervan, o.a. door von Tetmajer [4]. De proefresultaten konden niet worden omgezet in een bevredigende theoretische verklaring, maar wel in praktisch bruikbare grafieken en tabellen met knikspanningscoëfficiënten.

Tot voorbij het midden van de 20^{ste} eeuw werden in normen [40], [41] voorschriften gegeven waarbij de toelaatbare drukspanning afhankelijk werd gesteld van het materiaal en de slankheid van de staaf.

Vanaf het eind van de 19^{de} eeuw werd het stabiliteitsonderzoek uitgebreid naar de interactie tussen belastingen, vervormingen en draagvermogen van slanke, op buiging belaste staven die onder ongunstige omstandigheden kunnen 'kippen', wat in 'van Dale, Groot woordenboek der Nederlandse taal' wordt omschreven als:

"het uitbuigen van de as van een belaste balk, loodrecht op zijn buigingsvlak, gepaard met wringing in de doorsneden".

¹ Nummers tussen [-] verwijzen naar Hoofdstuk 11, Literatuuroverzicht

De eerste publicaties over onderzoeksresultaten op het gebied van kipstabiliteit, zoals die van Prandtl [3] besteedden vooral aandacht aan het vinden van de grens tussen labiel- en stabiel evenwicht, de zogenoemde 'eigenwaarde' van het stabiliteitssysteem.

In 1933 verscheen het standaardwerk 'Theory of elastic stability' van Timoshenko [6a], dat in 1961 werd gevolgd door een tweede druk [6b]. De berekening van kip- en knikstabiliteit wordt daarin uitgevoerd door het opstellen van differentiaalvergelijkingen. De oplossing hiervan, die analytisch onmogelijk blijkt te zijn, wordt, ten koste van zeer veel nauwkeurig rekenwerk (zonder computers) met behulp van reeksontwikkeling, gepresenteerd in de vorm van praktisch bruikbare tabellen.

In diverse andere publicaties worden soms vereenvoudigingen en ook wel uitbreidingen aangetroffen, zoals bij Chen en Atsuta [10] met een fundamentele studie over dubbele buiging en torsie van, vooral, dunwandige staven en bij Vandepitte [11] met een zeer omvangrijk standaardwerk over alle mogelijke aspecten van de toegepaste mechanica, met daarin ook een grondige behandeling van knik en kip.

Trahair [23] biedt een uitgebreid en praktisch werk speciaal over kippen van diverse typen draagstructuren en staven, met verschillende belastingcombinaties, waarbij de berekeningen zijn gebaseerd op het principe van virtuele vormveranderingsarbeid. De dissertatie van Brüninghoff [17] behandelt vooral de invloed van steunverbanden op de kipstabiliteit van houten spanten en balken.

Tot voorbij het midden van de 20^{ste} eeuw lijkt het bepalen van de zogenoemde 'eigenwaarde' het einddoel van de stabiliteitsberekeningen te zijn. De verhouding tussen de werkelijk acceptabele belasting op een constructie en de sterkte daarvan wordt voor praktische toepassingen gevonden in een (min of meer arbitrair vastgestelde) zogenoemde 'veiligheidscoëfficiënt'. Voor constructies waarvan de sterkte mede afhankelijk is van de stijfheid (stabiliteitsgevallen) wordt daarbij een hogere waarde gekozen dan voor constructies waarbij de vervormingen geen rol spelen bij de bepaling van de sterkte, zoals uitsluitend op buiging belaste, zijdelings gesteunde staven.

Omstreeks 1960 publiceerde Dicke [14b] in een aantal artikelen (vooral in het blad Cement) onder het motto "het nieuwe denken" een overzichtelijke methode om de extra vervormingen en momenten van de 2^{de}-orde te berekenen.

Met toepassing van de term n (gedefinieerd als de verhouding tussen de Eulerse druksterkte en de in rekening te brengen drukbelasting) introduceerde hij in Nederland de (inmiddels zeer bekende) vergrotingsfactor: $n / (n-1)$ om de eindvervorming, de totale krachtsverdeling en daarmee ook de benodigde sterkte van stabiliteitsconstructies zo nauwkeurig mogelijk te kunnen benaderen.

Deze methode is toepasbaar op zowel stabiliteitsconstructies als skeletten van kolommen en balken en/of vloeren, ingeklemde kernen, spanten als ook op aparte staven en biedt een goed inzicht in de kans op instabiliteit. Daarbij wordt uitgegaan van de 'eigenwaarde' van het stabiliteitssysteem of de staaf en de introductie van het begrip 'initiële vervormingen' om de optredende spanningen in (en dus ook de bezwijkbelasting van) op knik belaste constructies voldoende nauwkeurig te kunnen voorspellen.

Dergelijke methoden zijn voorgeschreven in de recente (anno 2006) Nederlandse normen TGB 1990 [42] en Eurocode EC5 [43] voor stabiliteitsberekeningen van constructies die zijn belast op druk en op buiging in het vlak van de grootste buigstijfheid.

Voor de toetsing van de kipstabiliteit zijn in deze normen weliswaar rekenregels met formules en coëfficiënten gegeven, die zijn afgeleid uit de optredende vervormingen in het vlak loodrecht op de belasting, maar de 2^{de}-orde vergrotingseffecten zijn echter niet duidelijk herkenbaar. De normen wekken daardoor (onbedoeld) de indruk dat er (altijd) een linear verband zou bestaan tussen belastingen en spanningen.

De 'veiligheidscoëfficiënt' is inmiddels vervangen door, op statistische uitgangspunten gebaseerde, 'belasting- en materiaalfactoren' en de berekeningen zijn zonder hulpmiddelen zoals tabellen en grafieken [44, 46, 47] praktisch niet meer uit te voeren.

Ondertussen is de computer als rekengereedschap absoluut onmisbaar geworden, waardoor bijvoorbeeld het, ongetwijfeld maandenlange, rekenwerk van Timoshenko en de zijnen heden ten dage in slechts enkele seconden zou kunnen worden uitgevoerd. Het actuele onderzoek naar de stabiliteit van staven is dan ook vooral gericht op de mogelijkheden die de computer (en vooral de pc) kan bieden, met een stroom van publicaties als gevolg.

Te noemen zijn: de computersimulaties van de druksterkte van hout, zoals in de dissertatie van Blass [16] die de basis vormden van de knikformules in Eurocode EC5 [43], tabellen zoals van Stamme [45], op resultaten van computerberekeningen gebaseerde aanbevelingen voor ontwerp- en controleformules, zoals van Eggen [31], benaderingsmethoden zoals van Lohse [24] en computersimulaties met iteratieve berekeningen zoals van Padmoes [21]. De belangrijkste overeenkomst tussen deze laatste publicaties is dat er specifieke computerprogramma's worden ontwikkeld om de berekeningen efficiënt uit te voeren, waarmee de grenzen van de constructieve mogelijkheden aanzienlijk worden verruimd.

Wat kan deze dissertatie daar nog aan toevoegen?

1. Het belangrijkste antwoord op deze vraag is al gegeven in de inleiding. Vooral het ontbreken van een duidelijke koppeling van de kipformules uit de gebruikelijke normen met de bijbehorende 2^{de}-orde effecten is een gemis voor de dagelijkse constructeurspraktijk. Daarom is het zinvol om voor het bepalen van zowel de knik- als de kipstabiliteit een zelfde methodiek te bedenken, die eenvoudig genoeg is om, zonder bijzondere hulpmiddelen, gebruikt te kunnen worden.
2. Toepassing van een zelfde methodiek kan sterk bijdragen aan het verkrijgen van inzicht in het (op zich zelf ingewikkelde) gedrag van kip- en knikgevoelige staven. Daarom is een zo eenvoudig en overzichtelijk mogelijke methodiek ontwikkeld waarmee in zeer korte tijd de nodige berekeningen zijn te maken.
3. In de loop van de tijd hebben de berekeningsmethoden voor alle praktisch voorkomende materialen voor draagconstructies ieder een eigen ontwikkeling doorgemaakt. Toch moeten ze alle voldoen aan de elementaire wetten van de mechanica.

Daarom wordt hier een methode aangeboden die toepasbaar is voor de materialen hout, staal en beton en, na invoering van de relevante materiaaleigenschappen, ook voor andere materialen.

Bij het ontwerpen, berekenen en toetsen van draagconstructies in het algemeen, en van op buiging en/of op druk belaste staven in het bijzonder, gaat het vooral om het bepalen van de stabiliteit, de stijfheid en de sterkte.

Mogelijk dat toepassing van de resultaten van deze studie kan bijdragen aan het inzicht dat daarvoor nodig is en aan het plezier dat het bereiken van een goed resultaat bij een economische tijdbesteding kan opleveren.

Omdat niet alleen de kniksterkte maar ook de kipsterkte van een staaf omgekeerd evenredig blijkt te zijn met het kwadraat van de staaflengte kan de eerbiedwaardige uitspraak van Petrus van Musschenbroek van bijna drie eeuwen geleden worden uitgebreid met een variant:

De sterkte van een en hetzelfde hout, hebbende dezelfde dikte maar verscheidene lengte, liggende horizontaal, en van boven door zwaarte neergedrukt, is in ene omgekeerde reden van de vierkanten der lengten.

Hoofdstuk

3

Uitgangspunten

3.1 Staftypen, belastingen en randvoorwaarden

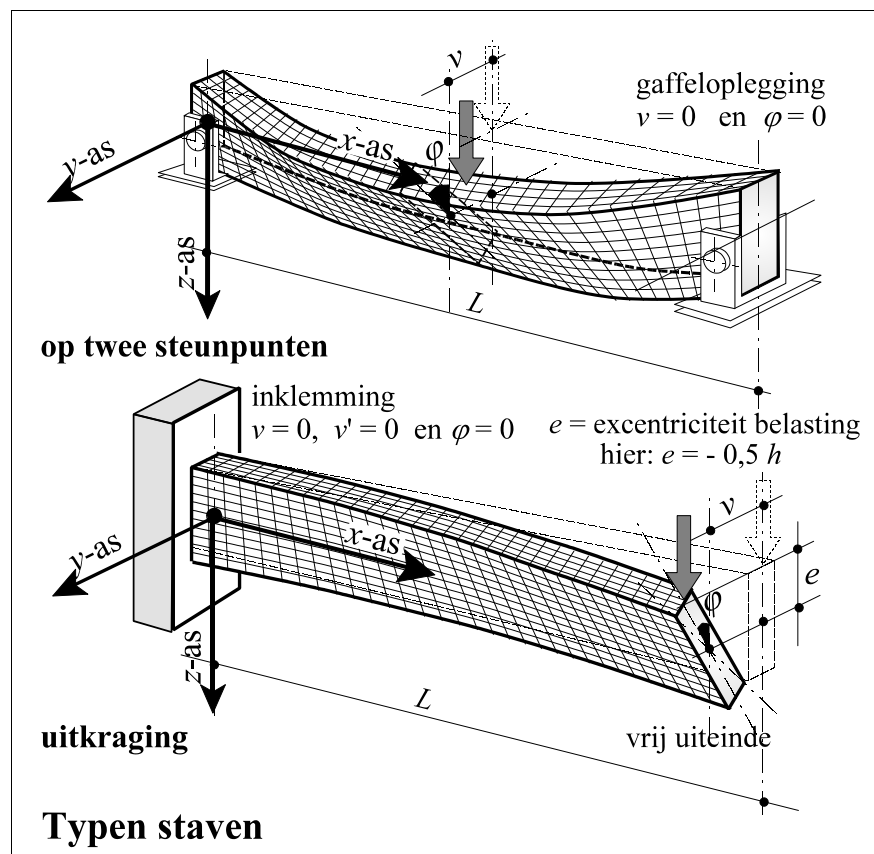
Er wordt uitgegaan van rechte prismatische staven met rechthoekige- of I-vormige doorsnede in de x -richting, zonder zijdelingse steun, die om de x -as vrij kunnen roteren en om de y -as (de 'sterke' as) en de z -as (de 'zwakke' as) vrij kunnen uitbuigen.

Beschouwd worden:

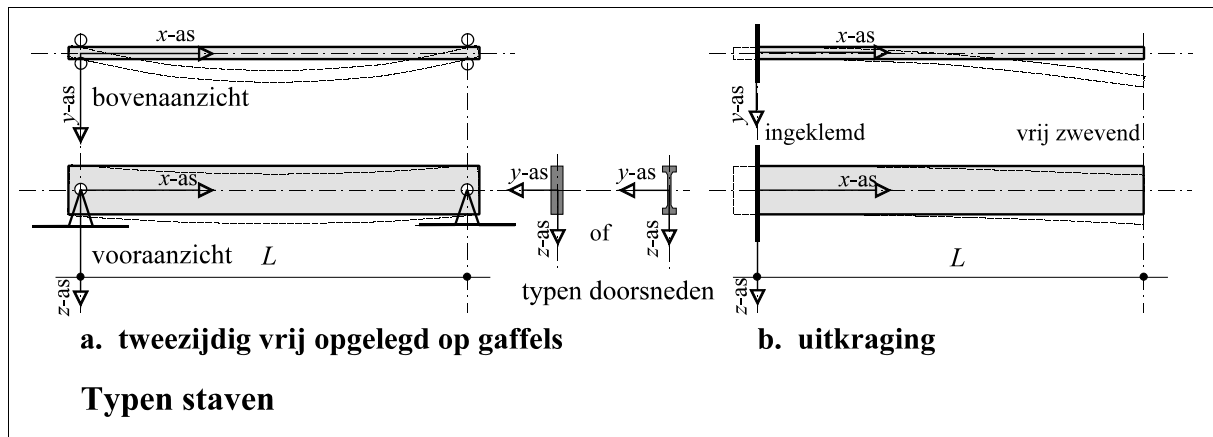
twee staftypen:

- staven op twee steunpunten, aan begin en eind met 'gaffelopleggingen',
- uitkragingen, aan het begin ingeklemd, aan het eind: vrij verplaatsend en roterend.

Zie de figuren 3.1 en 3.2



figuur 3.1



figuur 3.2

De staven kunnen worden belast met:

- een constant moment M_y om de y -as over de gehele staaf lengte,
- een gelijkmatig verdeelde belasting q_z (al dan niet excentrisch aangrijpend)
- een geconcentreerde last F_z (al dan niet excentrisch aangrijpend)
 - bij een staaf op twee steunpunten in het staafmidden
 - bij een uitkraging in het staafeinde.

Al deze belastingen worden gecombineerd met:

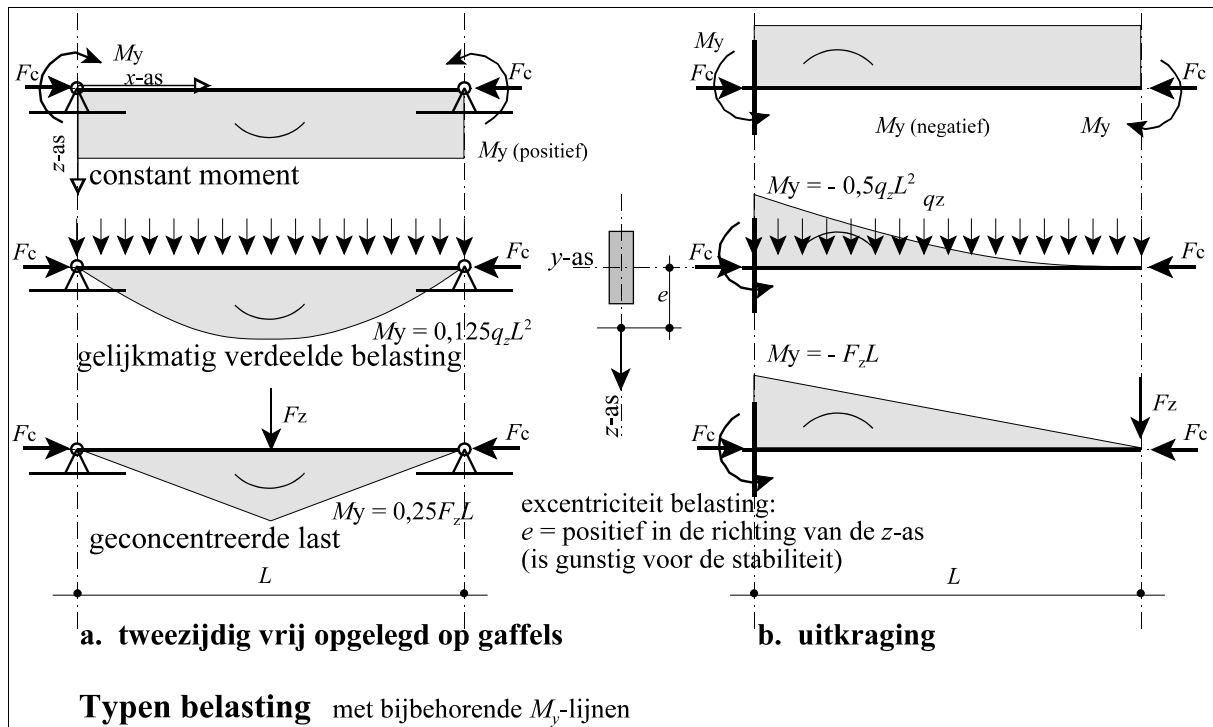
- een axiale drukkracht F_c in de x -richting (centrisch aangrijpend in het zwaartepunt van de doorsnede)
 - bij een eventueel excentrisch aangrijpende axiale drukkracht kan worden gesuperponeerd met een constant moment: $M_y = F_c e$

Voor de schematisering van deze belastinggevallen: zie figuur 3.3.

Het gedrag van deze staven wordt onderzocht via twee methoden:

- Een **iteratiemethode** waarbij, uitgaande van initiële uitbuigingen, de interactie tussen vervormingen, belastingen en 2^{de}-orde-effecten in negen stappen wordt nagegaan en met behulp van een spreadsheet definitief wordt berekend. Zie Hoofdstuk 5.
 - Een **analytische** methode waarbij door het opstellen en (waar nodig numeriek) oplossen van differentiaalvergelijkingen wordt onderzocht:
 - de vervorming (kinematische vergelijkingen),
 - de samenhang (constitutieve vergelijkingen) en
 - het evenwicht (evenwichtsvergelijkingen)
- Zie Hoofdstuk 6.

Het zal blijken dat beide methoden tot dezelfde uitkomsten leiden.



figuur 3.3

De iteratiemethode in negen stappen biedt verreweg de meeste mogelijkheden om op een betrekkelijk eenvoudige en overzichtelijke manier diverse andere staftypen en belastingcombinaties te analyseren.

Voor zover de auteur bekend, is deze methode niet eerder in deze vorm toegepast om de kip- en knikstabiliteit van staven te bepalen.

Er is uitgebreid gebruik gemaakt van de mogelijkheden die een spreadsheet biedt om de resultaten weer te geven in grafieken, waardoor onlogische uitkomsten (als gevolg van aanvankelijke fouten in de programmering) tijdig werden gesignaleerd. Door deze visuele controle gecombineerd met de nagenoeg onbeperkte keuze van het aantal iteraties werd een zeer grote nauwkeurigheid bereikt.

Vanwege de nauwkeurigheid en efficiënte tijdbesteding zijn de opzet en de uitwerking van de iteratiemethode in stappen te beschouwen als de kern van deze dissertatie.

Ter controle worden van enkele belastinggevallen de uitkomsten vergeleken met die van een serie berekeningen volgens de EEM (Eindige-Elementen-Methode).

3.2 Notaties en tekenafspraken

3.2.1 Notaties

geometrie van staven:

L	lengte van de staaf		[m]
A	oppervlak van de doorsnede		[m ²]
A_{fl}	oppervlak van de flens		„
b	breedte van de doorsnede		[m]
h	hoogte van de doorsnede		„
t	dikte van een onderdeel		„
t_{fl}	flensdikte bij I-profielen		„
t_1	lijfdikte bij I-profielen		„
e	excentriciteit aangrijpingspunt belasting		„
z	excentriciteit aangrijpingspunt steunreactie		„
x,y,z	coördinaatassen		[--]
	indien toegepast als afstand langs de coördinaatassen		[m]

statische grootheden:

I_y	traagheidsmoment van de doorsnede om de y -as (ook: kwadratisch oppervlaktemoment)		[m ⁴]
I_z	idem om de z -as		„
I_{fl}	idem van de flens (van een I-profiel) om de z -as		„
I_{tor}	traagheidsmoment voor torsie		„
I_w	welvingstraagheidsmoment (ook: welvingsfactor)		[m ⁶]
W_y	weerstandsmoment tegen buiging om de y -as	$W_y = 2I_y / h$	[m ³]
W_z	idem om de z -as	$W_z = 2I_y / b$	„
W_t	weerstandsmoment tegen torsie om de x -as		„
r_y	kernstraal in de z -richting voor buiging om de y -as	$r = W / A$	[m]
r_z	idem in de y -richting voor buiging om de z -as		„
i_y	traagheidsstraal in de z -richting voor buiging om de y -as	$i^2 = I / A$	„
i_z	idem in de y -richting voor buiging om de z -as		„
λ_y	slankheid voor knik in de z -richting t.g.v. buiging om de y -as	$\lambda = L / i$	[--]
λ_z	idem voor knik in de y -richting t.g.v. buiging om de z -as		„
λ_{rel}	relatieve slankheid in relatie tot de sterkte en de stijfheid		„

materiaaleigenschappen:

E	elasticiteitsmodulus		[N/mm ²]
G	afschuivingsmodulus (ook: glijdingsmodulus)		„

f_c	druksterkte	[N/mm ²]
f_m	buigsterkte	„
f_t	schuifsterkte	„

stijfheid en sterkte van staafdoorsneden:

EI_y	stijfheid voor buiging om de y -as = elasticiteitsmodulus \times traagheidsmoment om de y -as	[Nm ²]
EI_z	idem voor buiging om de z -as	„
GI_{tor}	torsiestijfheid voor rotatie om de x -as = glijdingsmodulus \times torsietraagheidsmoment,	„
GI_t	torsiestijfheid voor rotatie om de x -as = GI_{tor} + welvingsfactor + 'Wagnereffect'	„
EI_w	bijdrage aan rotatiestijfheid door belemmering van de welving van de doorsnede = elasticiteitsmodulus \times welvingtraagheidsmoment	[Nm ⁴]
K_w	'Wagner'coëfficiënt = component van de torsiestijfheid	[Nm ²]
C_{tw}	verhouding tussen welvingsstijfheid en torsiestijfheid gerelateerd aan de staaflengte	[--]
F_{Ey}	knikkracht volgens Euler voor knik in de z -richting door buiging om de y -as	[N]
F_{Ez}	idem voor knik in de y -richting door buiging om de z -as	„
F_u	uiterste drukkracht F_c gerelateerd aan de sterkte	„
M_{kr}	kritisch moment M_y voor kip	[Nm]
M_{uy}	uiterste moment M_y gerelateerd aan de buigsterkte	„
M_{uz}	uiterste moment M_z gerelateerd aan de buigsterkte	„

belastingen en momenten:

q_z	belasting per lengte-eenheid in de z -richting (veroorzaakt momenten M_y)	[N/m]
F_z	geconcentreerde belasting in de z -richting (veroorzaakt momenten M_y)	[N]
F_c	axiale drukkracht in de x -richting, centrisch aangrijpend op een staafeind	„
M_y	buigend moment om de y -as (door belasting in z -richting + 2 ^{de} -orde effecten)	[Nm]
M_z	buigend moment om de z -as (door belasting in y -richting + 2 ^{de} -orde effecten)	„
M_x	torderend moment om de x -as (door excentrische belasting loodrecht op de staafas)	„
M_t	torsiemoment om de staafas (door M_x + 2 ^{de} -orde effecten)	„
M_{tor}	torsiemoment door 'zuivere' torsie	„
M_{tw}	torsiemoment door verhinderde welving	„
M_{tf}	flensbuigingsmoment als gevolg van M_{tw}	„
M_{i1}	1 ^{ste} -orde buigend- of torsiemoment ($i = t, x, y, z$)	„
M_{i2}	2 ^{de} -orde buigend- of torsiemoment „ „	„
V_z	dwarskracht in z -richting (komt voor in combinatie met M_y)	[N]

spanningen:

σ_c	drukspanning t.g.v. F_c	[N/mm ²]
σ_{my}	buigspanning t.g.v. M_y	„
σ_{mz}	buigspanning t.g.v. M_z	„
τ	schuifspanning t.g.v. M_t en/of V_z	„

vervormingen:

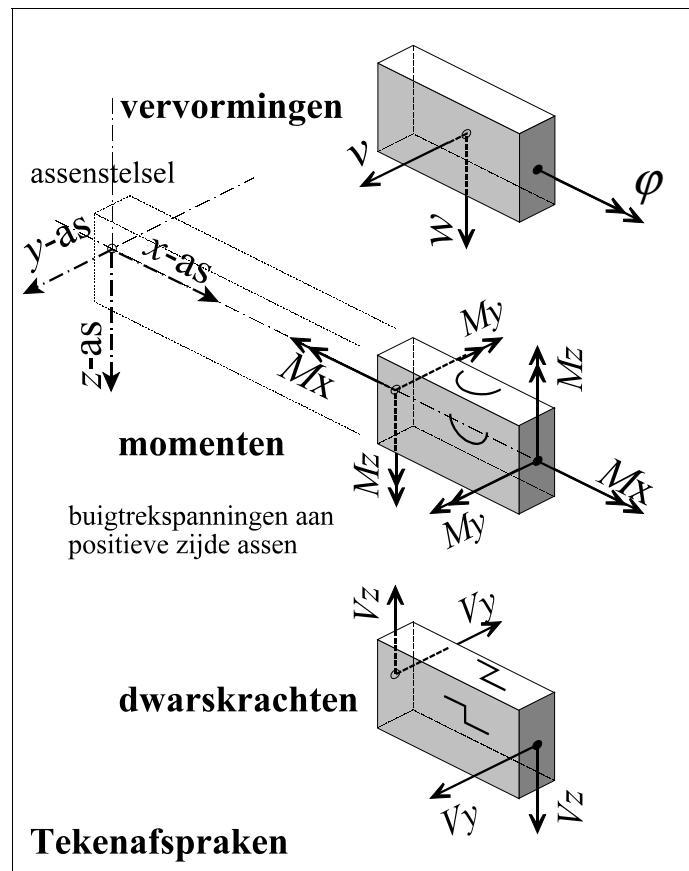
w	verplaatsing (van een deel van de staaf) in de z -richting	[m]
v	idem in de y -richting	„
v_0	initiële verplaatsing van de onbelaste staaf	„
v_1	verplaatsing door de belasting (1 ^{ste} -orde)	„
v_2	idem door invloed van vervormingen (2de-orde)	„
φ	rotatie van een staafdoorsnede (hoek in radialen)	[rad]
φ'	torsie = rotatie per (staaf) lengte-eenheid (in de literatuur soms ook θ)	[rad/m]

hulpgrootheden:

A_u	virtuele vormveranderingsarbeid door de belastingen (uitwendig)	[Nm]
A_i	idem door buigspanningen (inwendig)	„
n	2 ^{de} -orde factor (ook: Eulerse knikfactor)	[--]
n_y^*	2 ^{de} -orde factor voor vervormingen in de z -richting door buiging om de y -as	„
n_z^*	idem voor vervormingen in de y -richting door buiging om de z -as	„
n_{zM}^*	component van n_z^* door buigende momenten om de y -as	„
n_{zF}^*	component van n_z^* door een axiale drukkracht	„
k	constante, factor of coëfficiënt	[--]
k_i	reductiefactor afhankelijk van de toepassing ($i = 1, 2, 3, \dots$)	„
k_{buc}	knikfactor, algemeen voorkomend	„
k_{com}	knikfactor (in NEN 6760)	„
k_c	knikfactor (in EC 5)	„
k_{crit}	instabiliteitsfactor in relatie tot kip (in EC 5)	„
k_{mom}	vergrotingsfactor door 2 ^{de} -orde effecten in relatie tot knik (in NEN6760)	„
k_{ins}	instabiliteitsfactor in relatie tot kip (in NEN 6760)	„
g	tijdelijk hulpfactor (bij afleiding van formules)	„
\bar{f}	algemeen: streepje boven functieteken: maximale waarde van de betreffende functie zoals bij: momenten: in of nabij het staafmidden of bij de inklemming spanningen: idem vervormingen: in het staafmidden of bij het vrije staafeind	

3.2.2 Tekenafspraken

De gehanteerde tekenafspraken zijn weergegeven in figuur 3.4



figuur 3.4

- Moment M_y veroorzaakt buigtrekspanningen aan de positieve z -kant van de doorsnede,
- Idem moment M_z aan de positieve y -kant,
- Op een doorsnede loodrecht op de x -as is de richting van de vector van het torderend moment M_x evenwijdig met de x -as,
- Op een doorsnede loodrecht op de x -as werkt de dwarskracht V_z in de richting van de positieve z -as.

Zie voor toepassingen figuren 4.4 en 4.5.

3.3 Overige aannamen

Bij de hier te analyseren constructies en belastinggevallen wordt aangenomen dat de invloed van dwarskrachten op zijdelingse verplaatsingen en de invloed van normaalkrachten op verkorting of verlenging van de staaf kan worden verwaarloosd. Uit de elasticiteitsleer volgen dan zowel voor staven op 2 steunpunten als voor uitkragingen de volgende algemene relaties:

$$M_y = -EI_y w'' \quad M_z = -EI_z v'' \quad M_t = GI_t \varphi' \quad (3.01)$$

De buigstijfheden EI_y en EI_z zijn eenvoudig te ontleen aan de elasticiteitsleer en behoeven hier geen nadere toelichting.

De torsiestijfheid GI_t is gecompliceerder en bestaat in principe uit 3 componenten: 'zuivere' torsiestijfheid, verhinderde welving, en invloed van normaalkracht (volgens het zo genoemde 'Wagnereffect'). In Bijlage 3. wordt dit verder uitgewerkt.

Het resultaat van deze componenten wordt verder samengevoegd in de term: GI_t .

Een staaf kan een toenemende belasting dragen tot ergens in de staaf de berekende spanning zo groot wordt dat de sterkte van het materiaal wordt bereikt.

Onderzocht worden nu plaats en grootte van de optredende spanningen.

Een staaf, van welk materiaal dan ook, is nooit zuiver recht en kan praktisch ook nooit zuiver centrisch belast worden. De (rechte) werklijn van een axiale drukkracht zal dan ook nooit precies samenvallen met de (enigszins gebogen) staafas en een zijdelingse belasting loodrecht op de staafas ligt nooit precies in een recht vlak met de verbindingslijn tussen de steunpunten. Hierdoor ontstaan naast gelijkmatig verdeelde drukspanningen ook (lineair verlopende) extra buigspanningen in alle staafdoorsneden en extra torsiespanningen in alle doorsneden.

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A} \quad \sigma_{my} = \frac{M_y}{W_y} \quad \sigma_{mz} = \frac{M_z}{W_z} \quad \sigma_{mt} = \frac{M_t}{W_t}$$

Aangenomen wordt:

1. De elasticiteitsleer (inclusief de stelling dat vlakke doorsneden door buiging vlak blijven) mag worden aangehouden, zodat overal de vervormingen zich evenredig met de spanningen ontwikkelen en er dus met een lineair verloop van de buigspanningen in elke doorsnede kan worden gerekend.
2. Omdat verkorting door axiale drukkrachten en afschuiving door dwarskrachten voor het hier gestelde doel meestal klein genoeg zijn om veilig te kunnen worden verwaarloosd, worden alleen uitbuiging door buigende momenten en rotatie door torsiemomenten in rekening gebracht.

3. Ongesteunde staven kunnen in twee richtingen vrij uitbuigen en over de gehele lengte vrij roteren. Volledig zijdelings gesteunde staven kunnen slechts in één richting vrij uitbuigen.
Staven met zijdelingse steun aan de trekzijde zijn als bijzonder geval op te vatten en worden behandeld in hoofdstuk 7.
4. De invloeden van geometrische imperfecties, restspanningen en inhomogeniteiten worden in rekening gebracht door bij elke onbelaste staaf uit te gaan van een initiële uitbuiging.
5. De in rekening te brengen 'top'waarde of amplitude van de initiële uitbuigingslijn wordt gekozen in overeenstemming met de van toepassing zijnde normen. Deze lijn kan in principe een willekeurige gebogen vorm hebben, maar omdat de juiste vorm een kleine tot verwaarloosbare invloed heeft op het einderesultaat wordt met een sinuslijn gerekend.
6. Bij staven op twee steunpunten wordt geen initiële rotatie in rekening gebracht, omdat zichtbaar getordeerde staven bij de montage kunnen worden afgekeurd of aan begin en eind zodanig aan de gaffelopleggingen kunnen worden bevestigd dat de beginrotatie in het staafmidden nagenoeg nul is.
7. Kipinstabiliteit kan optreden bij een combinatie van een geringe stijfheid loodrecht op de richting van de belasting en een geringe torsiestijfheid van de staafdoorsnede. Dergelijke staafconstructies zijn echter alleen verantwoord toe te passen als er geen uitwendige torsie- en/of dwarsbelasting in de 'zwakke' richting is.
8. Er wordt uitgegaan van twee grenstoestanden (volgens de terminologie van NEN 6702 - TGB 1990 Belastingen en vervormingen) waarbij het effect van de in rekening te brengen belasting(en) en de respons van de constructie de gestelde eisen juist niet overschrijden:
 - de BGT (bruikbaarheidsgrenstoestand) waarbij eisen worden gesteld aan de vervorming van de constructie bij vooropgesteld gebruik,
 - de UGT (uiterste grenstoestand) waarbij eisen worden gesteld aan de constructieve veiligheid.
9. Door interactie van belasting, stijfheid en vervormingen komt een geleidelijk proces van 2^{de}-orde effecten op gang dat (bij gelijkblijvende belasting) kan worden beschreven als een reeks stappen:
 - spanningen,
 - vervormingen (uitbuigingen en rotaties),
 - extra spanningen,
 - extra vervormingen,
 - enz. enz.totdat een eindsituatie wordt bereikt.

-
10. Als elke stap in deze reeks kleiner is dan de vorige stopt het proces bij een zekere eindwaarde (limiet) van de vervorming, mits de daarbij optredende maatgevende spanning kleiner is dan de materiaalsterkte, waarna de constructie wordt getoetst aan de eisen betreffende de BGT.
 11. In alle overige gevallen bezwijkt de staaf bij een (soms veel) kleinere belasting dan uit de rekenwaarde van de materiaalsterkte zou volgen, waarna de constructie wordt getoetst aan de eisen betreffende de UGT.
 12. Er wordt geen uitwendige (1^{ste}-orde) torsiebelasting in rekening gebracht en ook geen zijdelingse belasting in de 'zwakke' richting (dat is de y -richting waardoor buigende momenten M_{z1} om de z -as zouden ontstaan).
Torsiemomenten M_{t2} en buigende momenten M_{z2} ontstaan uitsluitend als 2^{de}-orde momenten.

Hiermee zijn de meeste praktisch voorkomende belastinggevallen van zijdelings ongesteunde staven en van staven die worden gesteund in de trekzone voldoende nauwkeurig te benaderen.

Hoofdstuk

4

Basisvergelijkingen en berekeningsmethoden

Draagconstructies, waarbij behalve buigende momenten ook normaalkrachten optreden of die loodrecht op hun belaste vlak (enige) vrijheid van verplaatsing hebben, kunnen niet eenvoudig worden berekend alsof er een lineair verband tussen belasting, spanningen en vervormingen zou bestaan. Door de in deze gevallen optredende interactie tussen vervormingen en spanningen ontstaan 2^{de}-orde effecten, die oorzaak zijn van extra vervormingen en spanningen, soms gevolgd door verlies van stabiliteit. Om het gedrag van deze constructies te kunnen beoordelen is het nodig om zo nauwkeurig mogelijk de relaties tussen belastingen en vervormingen te analyseren.

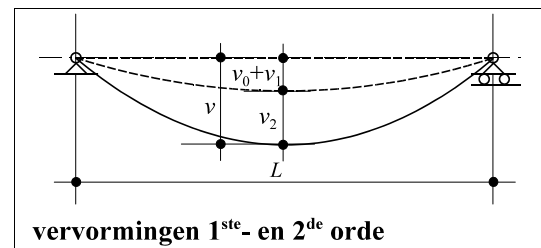
4.1 Vervormingen

De totale vervorming bestaat uit verplaatsingen w in de z -richting, verplaatsingen v in de y -richting en rotaties φ om de x -as. Vooruitlopend op een nadere argumentatie wordt hier de verplaatsing v in de y -richting als maatgevend criterium gehanteerd.

De totale verplaatsing v is opgebouwd uit drie componenten, zie figuur 4.1:

- v_0 = initiële vervorming,
- v_1 = 1^{ste}-orde vervorming door uitwendige belastingen,
- v_2 = 2^{de}-orde vervorming door combinatie van belastingen en eindvervorming.

$$v = v_0 + v_1 + v_2$$



figuur 4.1

Bij de nadere beschouwing van de vervormingen onder invloed van de 2^{de}-orde effecten wordt nu geïntroduceerd een **nieuwe term**:

$$n^* = \frac{\bar{v}}{\bar{v}_2} = \frac{\text{'topwaarde' totale vervorming}}{\text{'topwaarde' aandeel in de vervorming van de 2^{de}-orde}} \quad (4.01)$$

Deze verhoudingsterm n^* is weliswaar ongebruikelijk, maar zal de sleutel blijken te zijn om op een zeer efficiënte en overzichtelijke manier de 2^{de}-orde effecten te kunnen berekenen.

Onderscheid wordt gemaakt tussen vervormingen v (in de y -richting) en w (in de z -richting) waardoor eveneens onderscheid gemaakt wordt tussen de termen:

$$n_z^* = \frac{\bar{v}}{\bar{v}_2} \quad \text{en} \quad n_y^* = \frac{\bar{w}}{\bar{w}_2} \quad (4.01a) \text{ en } (4.01b)$$

De term n_y^* speelt alleen bij knik in 2-dimensionale gevallen een belangrijke rol en is dan algemeen bekend als de Eulerse knikfactor n .

Bij de stabiliteit van 3-dimensionale gevallen, zowel zonder als met belasting door een drukkracht, is de invloed van de vervorming w en de term n_y^* nagenoeg altijd verwaarloosbaar (zie bijlage 4) en kan bepaling van de term n_y^* achterwege worden gelaten. In deze gevallen zijn de 2^{de}-orde vervormingen v en de daarmee samenhangende momenten M_{z2} wel van groot belang. De aandacht in het vervolg van deze dissertatie zal dus vooral zijn gericht op het bepalen van de term n_z^* en het nagaan van de daaruit volgende consequenties.

De algemene relatie tussen de vervormingen v_0 , v_1 , v_2 en v is nu eenvoudig uit de eindsituatie af te leiden volgens het in de tabel gehanteerde schema:

beginsituatie:	$\bar{v}_0 + \bar{v}_1$	
er komt bij:	$\bar{v}_2 = \frac{\bar{v}}{n^*}$	(4.01c)
totaal:	$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}_1 + \frac{\bar{v}}{n^*}$	
tussenstap:	$\bar{v} \left(1 - \frac{1}{n^*} \right) = \bar{v}_0 + \bar{v}_1$	
eindsituatie:	$\bar{v} = \frac{\bar{v}_0 + \bar{v}_1}{1 - \frac{1}{n^*}} =$ $= (\bar{v}_0 + \bar{v}_1) \frac{n^*}{n^* - 1}$	(4.02)

De hier afgeleide

$$\text{vergrotingsfactor} = \frac{n^*}{n^* - 1} \quad (4.03)$$

is herkenbaar als de basisformule van het 2^{de}-orde effect waarmee de beginvervorming wordt vergroot tot de vervorming in de eindtoestand.

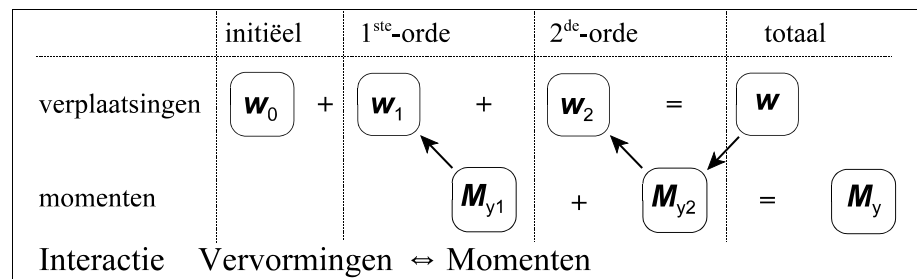
N.B. De bij n genoteerde 'ster' dient ter onderscheiding van de algemeen in de mechanica gebruikelijke definitie die ook is opgenomen in de stabiliteitsbepalingen van zeer veel Nederlandse en Europese normen.:

$$n = \frac{F_{Euler}}{F_{druk;aanwezig}} \quad (4.04)$$

Als er uitsluitend twee-dimensionale knik optreedt zijn n^* en n aan elkaar gelijk zoals later zal blijken.

In de UGT is vaak de totale vervorming veel groter dan de initiële vervorming, waardoor de exacte vorm van de (in principe volkomen willekeurige) initiële uitbuigingslijn niet van grote invloed is. Daarom is het praktisch om de v_0 -lijn te benaderen als een gemakkelijk te behandelen wiskundige vorm en hiervoor bij voorbeeld (zoals in NEN 6760 wordt voorgeschreven) een sinuslijn te kiezen. De vorm van de v_1 -lijn is geheel afhankelijk van de optredende belasting en volgt uit de elasticiteitsleer. De vorm van de v_2 -lijn volgt uit de 2^{de}-orde momenten, die op hun beurt weer het gevolg zijn van de interactie tussen de optredende krachten en de v -lijn, die zelf weer de som is van alle hiervoor genoemde vervormingen.

In 2-dimensionale gevallen (waarbij meestal de vervorming w wordt onderzocht) kan de algemene relatie tussen verplaatsingen en momenten worden weergegeven volgens het schema in figuur 4.2.



figuur 4.2

Uit het voorgaande mag duidelijk zijn dat de vier vervormingslijnen (v_0 , v_1 , v_2 en v) zelden geheel aan elkaar gelijkvormig kunnen zijn. De consequenties daarvan zijn meestal te ingewikkeld voor een zuiver wiskundig analytische oplossing. Daarom wordt in het volgende gezocht naar benaderingsmethoden die voor praktische toepassingen betrouwbare resultaten kunnen bieden.

Door de hier gehanteerde definitie van n^* is het in principe alleen nodig om de verhouding van de 'topwaarden' van de v_2 - en de v -lijn te gebruiken voor een voldoende nauwkeurige berekening van de optredende 2^{de}-orde effecten.

N.B. De bedoelde 'topwaarden' van de vervormingslijnen treden op bij een staaf op twee steunpunten in of nabij het staafmidden en bij uitkragingen aan het vrije staafeinde.

In de volgende Hoofdstukken wordt gedetailleerd beschreven hoe (na berekening van deze 'topwaarden') de 2^{de}-orde momenten en de daaruit volgende spanningen (met behulp van de term n^*) worden afgeleid, waarna het resultaat is te toetsen volgens de regels van de betreffende normen.

N.B. De 'topwaarde' \bar{v} van de geschatte uitbuigingslijn heeft voor de bepaling van n^* in principe (nog) niet de definitieve grootte te hebben, maar kan aanvankelijk willekeurig worden geschat. Hoewel een hierop gebaseerde vervormingsberekening dan evenmin de definitieve waarde van \bar{v}_2 geeft, levert de verhouding tussen de geschatte \bar{v} en \bar{v}_2 wel de juiste waarde van n_z^* . In bijlage 8.1 wordt dit nog met een voorbeeld toegelicht.

4.2 Interactie tussen krachten, momenten en vervormingen

Onderzocht worden hier de relaties tussen buigende momenten en uitbuigingen en torsiemomenten en rotaties en hun wisselwerking door 2^{de}-orde effecten, waarbij ook de invloeden van axiale drukkrachten een rol kunnen spelen.

De totaal in rekening te brengen momenten in een belaste staaf zijn opgebouwd uit:

- M_{y1}, M_{z1}, M_{t1} : 1^{ste}-orde momenten, rechtstreeks volgend uit de belastingen,
- M_{y2}, M_{z2}, M_{t2} : 2^{de}-orde momenten, volgend uit de totale vervormingen w, v en φ .

De totale vervormingen (uitbuigingen of rotaties) van de betreffende staaf is opgebouwd uit:

- w_0, v_0, φ_0 : initiële vervormingen (hierbij is de staaf spanningsloos en bestaan er dus geen momenten M_0),
- w_1, v_1, φ_1 : vervormingen door 1^{ste}-orde momenten,
- w_2, v_2, φ_2 : idem door 2^{de}-orde momenten.

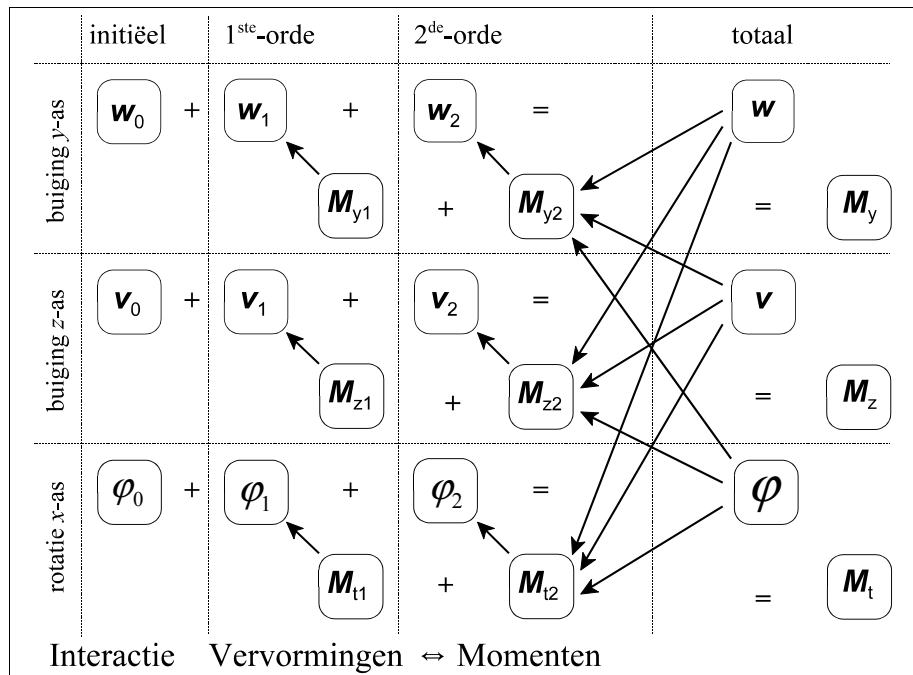
Er ontstaat aldus een gecompliceerd interactiepatroon tussen:

- vervormingen - momenten - vervormingen - enzovoort - enzovoort -

zoals schematisch is weergegeven in figuur 4.3.

Initiële vervormingen worden niet veroorzaakt door uitwendige krachten of momenten maar zijn het gevolg van materiaaleigenschappen en/of vervaardigingsprocessen. Zij worden daarom behandeld als een geometrische eigenschap van de betreffende staaf.

Wel kunnen zij bij het aanbrengen van belastingen (als onderdeel van de totale vervorming) medeoorzaak zijn van het optreden van 2^{de}-orde effecten.

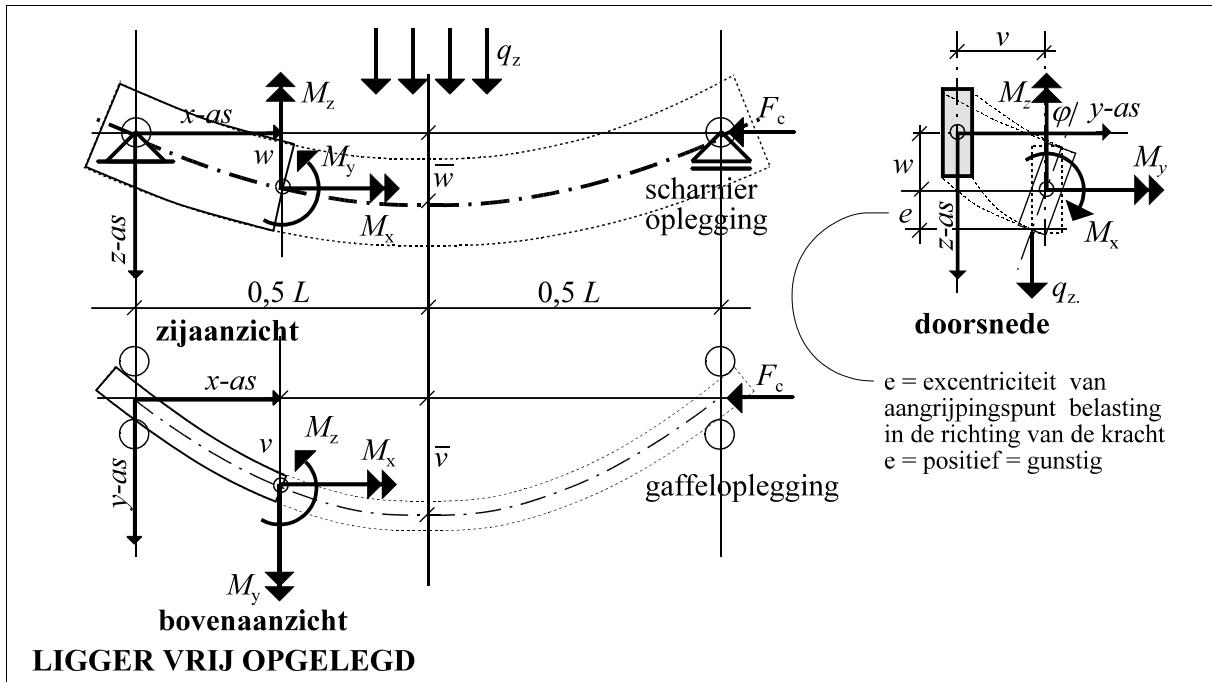


figuur 4.3

Alle vervormingen hebben een (zeer kleine) rotatie van de betreffende doorsnede tot gevolg:

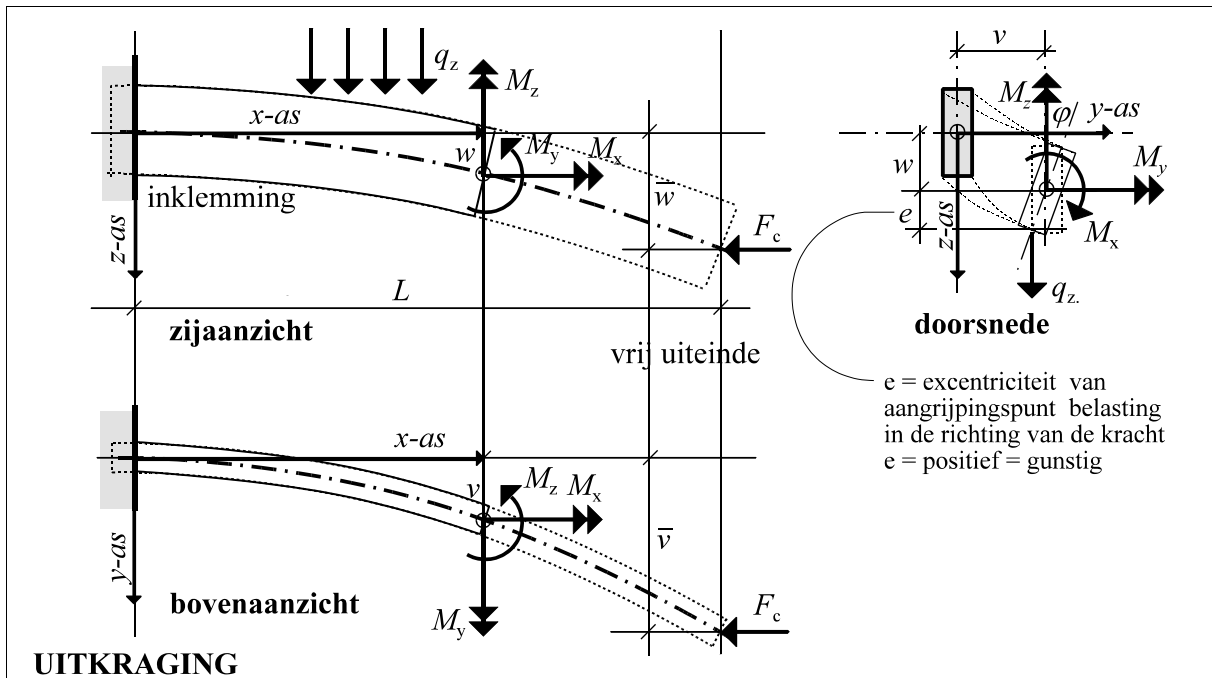
bij rotatie om de x-as roteert de doorsnede in zijn eigen vlak over een hoek: φ waarbij geldt:	$\sin \varphi = \tan \varphi = \varphi$ en $\cos \varphi = 1$
bij uitbuigingen v in de richting van de y-as (door buiging om de z-as) roteert de doorsnede over een hoek v' waarbij geldt:	$\sin v' = \tan v' = v'$ en $\cos v' = 1$
bij uitbuigingen w in de richting van de z-as (door buiging om de y-as) roteert de doorsnede over een hoek w' waarbij geldt:	$\sin w' = \tan w' = w'$ en $\cos w' = 1$

Bij een staaf (ligger of kolom) op 2 steunpunten met gaffelopleggingen kunnen krachten, momenten en vervormingen optreden zoals aangegeven in figuur 4.4:



figuur 4.4

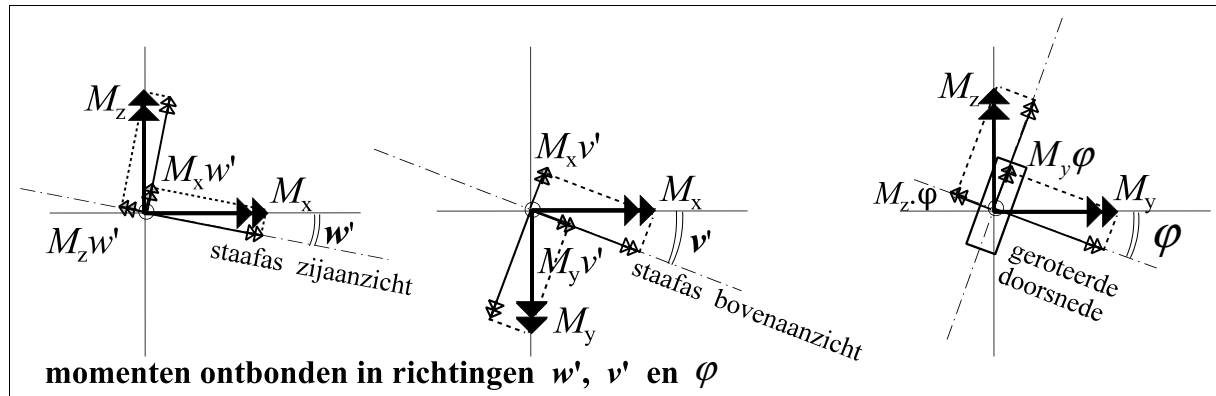
Voor een uitkraging zie figuur 4.5:



figuur 4.5

Door de 3-dimensionale rotaties van alle doorsneden kunnen de momenten en axiaalkrachten worden ontbonden in de richtingen evenwijdig aan en loodrecht op de staafas ter plaatse.

De relaties tussen momenten, axiaalkrachten, uitbuigingen en rotaties zijn weergegeven in de vectordiagrammen in figuur 4.6.



figuur 4.6

Hieruit is af te lezen:

- uitbuiging w veroorzaakt 2^{de}-orde buigend moment M_{z2} en torsiemoment M_{t2}
- „ v veroorzaakt 2^{de}-orde buigend moment M_{y2} en torsiemoment M_{t2}
- rotatie φ veroorzaakt 2^{de}-orde buigend moment M_{y2} en buigend moment M_{z2}

De ontbonden momentvectoren en de (ten gevolge van de verplaatsingen) excentrisch werkende axiaalkracht veroorzaken dus de volgende 2^{de}-orde momenten:

$$\begin{cases} M_{y2} = +F_c w^* & -M_{x1} v' & -M_{z1} \varphi \\ M_{z2} = +M_{x1} w' & +F_c v & +M_{y1} \varphi \\ M_{t2} = -M_{z1} w' & +M_{y1} v' & ** & +M_{x2} *** \end{cases} \quad (4.05)$$

N.B. * Voor een uitkraging gelden in de twee buigvergelijkingen voor de combinatie van een axiaalkracht met verplaatsing de termen: $F_c (w - \bar{w})$ en $F_c (v - \bar{v})$.

** De invloed van een axiale drukkracht op de rotatie wordt (zo nodig) verwerkt met behulp van het 'Wagner' effect als een vermindering van de torsiestijfheid. Zie voor nadere uitwerking hiervan: Bijlage 3.

*** De component M_{x2} ontstaat door de combinatie van een belasting in z - en/of y -richting met de verplaatsing v en/of w , hetgeen bij de te behandelen belastinggevallen nader zal worden uitgewerkt.

Deze momenten veroorzaken vervormingen (verplaatsingen en rotaties) van de 2^{de}-orde die zelf (samen met de vervormingen van de 1^{ste}-orde) weer invloed op de momenten uitoefenen.

De initiële vervormingen veroorzaken geen (in rekening te brengen) spanningen en dus ook geen momenten.

Voor de relaties tussen krommingen of torsies en inwendige buigende- of torsie-momenten gelden in het algemeen de elementaire betrekkingen:

$$\begin{cases} M_{y;tot} = M_{y1} + M_{y2} = -EI_y (w_1'' + w_2'') \\ M_{z;tot} = M_{z1} + M_{z2} = -EI_z (v_1'' + v_2'') \\ M_{t;tot} = M_{x1} + M_{t2} = GI_t (\varphi_1' + \varphi_2') \end{cases} \quad (4.06)$$

De relaties tussen momenten en vervormingen zijn te schrijven als een stelsel gekoppelde vergelijkingen:

Momenten	uitwendig			inwendig	
		1 ^{ste} -orde	2 ^{de} -orde	1 ^{ste} -orde	2 ^{de} -orde
buiging y-as	$M_{y;tot}$	$= + M_{y1}$	$+ F_c w - M_{x1} v' - M_{z1} \varphi$	$= - EI_y w_1''$	$- EI_y w_2''$
buiging z-as	$M_{z;tot}$	$= + M_{z1}$	$+ M_{x1} w' + F_c v + M_{y1} \varphi$	$= - EI_z v_1''$	$- EI_z v_2''$
rotatie x-as	$M_{t;tot}$	$= + M_{x1}$	$- M_{z1} w' + M_{y1} v' + M_{x2}$	$= + GI_t \varphi_1'$	$+ GI_t \varphi_2'$

De termen van de 1^{ste}-orde zijn inwendig en uitwendig geheel aan elkaar gelijk. Voor het vinden van de oplossing van deze vergelijkingen vallen ze geheel tegen elkaar weg zodat alleen de termen van de 2^{de}-orde overblijven:

buiging om de y-as	$M_{y2} = +F_c w - M_{x1} v' - M_{z1} \varphi = -EI_y w_2''$
buiging om de z-as	$M_{z2} = +M_{x1} w' + F_c v + M_{y1} \varphi = -EI_z v_2''$
rotatie om de x-as	$M_{t2} = -M_{z1} w' + M_{y1} v' + M_{x2} = +GI_t \varphi'$

Deze betrekkingen zijn voor de meest voorkomende belastinggevallen weliswaar als eenvoudig ogende differentiaalvergelijkingen te noteren, maar zonder hulp van numerieke methoden is het nagenoeg onmogelijk om hiervoor praktische oplossingen te vinden.

Zoals gemotiveerd in Hoofdstuk 3.3 wordt gerekend dat er geen uitwendige torsiebelasting en ook geen dwarsbelasting in de 'zwakke' richting aanwezig is.

Met $M_{x1} = 0$ en $M_{z1} = 0$ blijft er dan van (4.8) een stelsel vergelijkingen over, waarbij de koppeling tussen de 1^{ste} en de twee overige vergelijkingen is verdwenen:

buiging om de y-as	$M_{y2} = +F_c w = -EI_y w_2''$
buiging om de z-as	$M_{z2} = +F_c v + M_{y1} \varphi = -EI_z v_2''$
rotatie om de x-as	$M_{t2} = +M_{y1} v' + M_{x2} = +GI_t \varphi'$

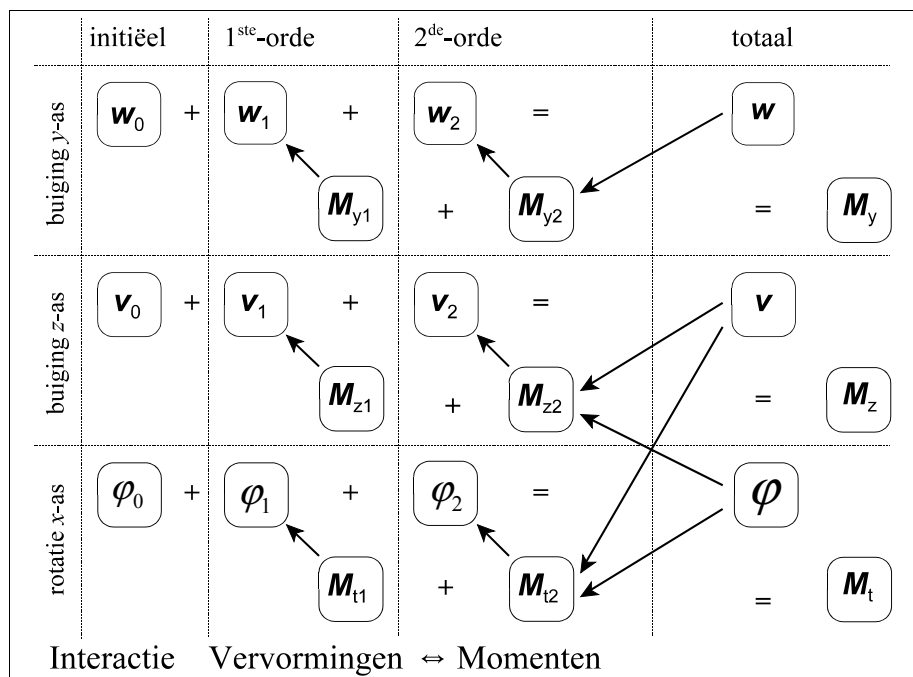
Of anders gerangschikt:

buiging om de y -as	$+ EI_y w_2'' + F_c w = 0$	(4.09a)
buiging om de z -as	$+ EI_z v_2'' + F_c v + M_{y1} \varphi = 0$	
rotatie om de x -as	$+ M_{y1} v' + M_{x2} - GI_t \varphi' = 0$	

Deze vergelijkingen zijn de basis voor verdere uitwerking.

De overblijvende onderlinge relaties tussen vervormingen en momenten worden hierdoor aanzienlijk vereenvoudigd zoals is te zien door het schema in figuur 4.3 te vergelijken met het nieuwe schema in figuur 4.7.

De verplaatsingen w in de 'sterke' richting met de bijbehorende 2^{de}-orde effecten kunnen nu onafhankelijk van v en φ worden berekend. De verplaatsingen v in de 'zwakke' richting en de rotaties φ om de x -as blijven wel onderling afhankelijk, maar ze worden niet beïnvloed door de verplaatsingen w , waardoor hun berekening eveneens wordt vergemakkelijkt.



figuur 4.7

In Bijlage 4 wordt aangetoond dat de buiging in de 'sterke' richting inderdaad van verwaarloosbare invloed is op de kipstabiliteit en het knikgedrag in de 'zwakke' richting.

4.3 Berekeningsmethoden

Ondanks de aangebrachte vereenvoudigingen is een zuiver wiskundig analytische oplossing van de voorgaande vergelijkingen slechts in een enkel bijzonder belastinggeval mogelijk, zoals een axiale drukkracht F_c en een (over het verloop van de staaflengte) constant moment M_y dat wordt veroorzaakt door twee gelijke en tegengestelde momenten aan de beide staafeinden.

Om dan toch ook de praktisch meest voorkomende andere belastinggevallen te kunnen berekenen is het nodig om een zo goed mogelijke benadering te zoeken. Toepassen van numerieke methoden met behulp van een spreadsheetprogramma is daartoe een effectief instrument.

De interactie tussen momenten en vervormingen wordt nu volgens twee methoden geanalyseerd:

1. Uitvoeren van een iteratiemethode in negen stappen inhoudend:

- aanname (van het verloop van de vervormingen),
- berekenen van de gevolgen daarvan (momenten),
- berekenen van de daardoor veroorzaakte (2^{de}-orde) vervormingen,
- toetsen of de gevolgen (uiteindelijke vervormingen) corresponderen met de gedane aannamen.

De benodigde berekeningen worden hierbij efficiënt en overzichtelijk uitgevoerd met behulp van het spreadsheetprogramma Quattro-Pro 9.

Dit wordt in Hoofdstuk 5 nader uitgewerkt.

2. Analytisch uitwerken en oplossen van af te leiden differentiaalvergelijkingen.

In de geraadpleegde literatuur wordt met deze methode begonnen om de kritische belasting (ook vaak genoemd de 'eigenwaarde' van het systeem) te berekenen.

Hier wordt gebruik gemaakt van de methode van virtuele vormveranderingsarbeid.

Waar de te voorschijn komende differentiaalvergelijkingen te gecompliceerd zijn voor een rechtstreekse wiskundige oplossing wordt een spreadsheet gebruikt om een praktisch bruikbaar resultaat te bereiken.

Dit wordt in Hoofdstuk 6 nader uitgewerkt.

Ter controle wordt een aantal uitkomsten vergeleken met berekeningen volgens de algemeen toegepaste en betrouwbaar geachte Eindige-ElementenMethode, die in het kader van deze dissertatie als exact wordt beschouwd.

Overigens is het eigenlijk minder belangrijk om de berekening van de kritische belasting als doel te stellen, maar veel meer om het gedrag van de constructie betrouwbaar te kunnen voorspellen bij toenemende belasting. Als wordt uitgegaan van een initiële verplaatsing is er eigenlijk geen sprake meer van een stabiliteitsprobleem, maar is de materiaalsterkte altijd bepalend voor het draagvermogen van de staaf.

Van belang is het dan om de berekening niet te baseren op theoretisch zuiver rechte staven, maar uit te gaan van praktische omstandigheden, waarbij elke staaf een zekere mate van imperfectie vertoont. Een bruikbare parameter voor alle mogelijke afwijkingen is, het invoeren van een initiële uitbuiging. In diverse normen worden hiervoor uitgangspunten verstrekt. Zie voor een nadere beschouwing Bijlage B2.

Het doel van deze studie is: de ontwikkeling van een methode om op een eenvoudige en eenduidige manier het kip/knikgedrag van rechte staven te kunnen voorspellen.

Daartoe dienen de volgende drie fasen:

1. Berekend wordt de grootte van de hiervoor geïntroduceerde term n^* ,
2. Nagegaan wordt welke invloed deze term n^* heeft op de grootte van de 2^{de}-orde effecten.
3. Als eindresultaat wordt de te verwachten maatgevende spanning berekend en getoetst aan de van toepassing zijnde normen.

Voor de verdere uitwerking wordt aan Chen en Atsuta [10] het volgende overzicht van randvoorwaarden ontleend:

verschijnsel	formule	randvoorwaarden	
verplaatsing:	v, w	= 0	bij steunpunten
hoekverdraaiing:	v', w'	= 0	bij inklemmingen
buigend moment:	$-EI_y w'' = M_y + \varphi M_z$	= 0	bij scharnier opleggingen
	$-EI_z v'' = M_z + \varphi M_y$	= 0	idem
dwarskracht:	$EI_y w''' = -V_z - \varphi V_y$	= 0	bij zwevende staafenden
	$EI_z v''' = -V_y + \varphi V_z$	= 0	idem
rotatiehoek:	φ	= 0	indien verhinderd, bij inklemmingen
torsie:	φ'	= 0	waar welving is verhinderd
welvingsmoment:	$-EI_w \varphi'' = M_{tw}$	= 0	als welving niet wordt verhinderd
torsiemoment:	$-EI_w \varphi''' + (GI_t + K)\varphi' = M_t$	= 0	bij vrije, onbelaste staafenden

Voor de stabiliteitscontrole wordt nu, resumerend, uitgegaan van de volgende aannamen:

1. De buigstijfheid om de y -as is (veel) groter dan om de z -as.
2. De invloed van w (verplaatsing in z -richting door buiging om de y -as) op v (verplaatsing in de y -richting) en φ (rotatie) is verwaarloosbaar klein, zie Bijlage 4.
3. De invloed van v en φ op w is eveneens verwaarloosbaar klein, zie Bijlage 4.
4. De verplaatsing v en de rotatie φ beïnvloeden elkaar en zijn samen maatgevend voor de stabiliteit.
5. De grootte van de altijd in rekening te brengen initiële verplaatsingen kan (moet) bij ontbreken van nadere gegevens worden ontleend aan de van toepassing zijnde normen, zie Bijlage 2.
6. Er wordt geen rekening gehouden met initiële rotaties omdat zichtbaar getordeerde staven kunnen worden afgekeurd of bij de montage zodanig aan de gaffelopleggingen kunnen worden bevestigd dat de beginrotatie in het midden van de staaf nagenoeg nul is.
7. Het verloop van de vervormingen van de 1^{ste}- en de 2^{de}-orde is (nagenoeg) gelijkvormig, zodat ze dus met dezelfde formule kunnen worden beschreven.
8. Het verloop van de verplaatsingen en de rotaties is bij staven op twee steunpunten (nagenoeg) sinusvormig. Voor uitkragingen zie Hoofdstuk 7.

Hoofdstuk

5

Iteratiemethode

-
stappenplan

De relaties tussen momenten en vervormingen zijn te ontleen aan figuur 4.6 waaruit het linker vectordiagram met de buiging om de y -as kan worden geëlimineerd zodat alleen de invloeden overblijven van de buiging om de z -as en de rotatie om de x -as.

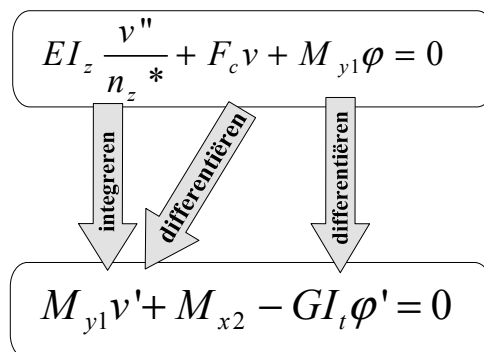
Hun onderlinge relaties zijn weergegeven in figuur 4.7.

Voor het hier gestelde doel blijven van vergelijking (4.09) nu alleen de tweede en derde vergelijking over.

buiging om de z -as	$M_{z2} = +F_c v + M_{y1} \varphi = -EI_z v_2''$	(5.01)
rotatie om de x -as	$M_{t2} = +M_{y1} v' + M_{x2} = +GI_t \varphi'$	

Dit zijn opmerkelijke vergelijkingen omdat zowel differentiëren als integreren dezelfde functies moet opleveren. Zie figuur 5.1:

Alleen in bijzondere gevallen (zoals belasting door een constant moment en een axiale kracht) is dit analytisch met sinus- en cosinusfuncties op te lossen.



figuur 5.1

Voor de meest praktische belastinggevallen moeten dus numerieke methoden worden toegepast. Een hedendaagse computer met een spreadsheetprogramma biedt hiertoe een algemeen toegankelijk en zeer efficiënt gereedschap.

Voor de uitwerking van alle volgende gevallen is het programma Quattro-Pro 9 gebruikt waarmee ook grafieken van de uitkomsten zijn gemaakt en ter verduidelijking bijgevoegd.

N.B. Het belangrijkste voordeel van het gebruik van grafieken is dat afwijkingen (bij voorbeeld ten gevolge van gemaakte invoerfouten) en discontinuïteiten onmiddellijk zichtbaar worden. Het verloop van series rekenuitkomsten is door grafieken visueel veel duidelijker te interpreteren (vooral wat betreft de onderlinge verhoudingen) dan door uitgebreide tabellen met opeenvolgende cijferreeksen.

De gedetailleerde inrichting van de gemaakte spreadsheets wordt in Bijlage 5 nader toegelicht. Hier wordt het proces in hoofdzaak beschreven.

- Begonnen wordt met een schatting van: de uitbuiging v en de afgeleide daarvan v' .
- Uit de rotatievergelijking volgen: het torsiemoment M_{t2} , de torsie φ' en na integratie de rotatie φ .
- Uit de buigingsvergelijking volgen: het 2^{de}-orde moment M_{z2} en de kromming v_2'' .
- De uitkomst van twee maal integreren is: de verplaatsing v_2 .
- De verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 levert tenslotte de term: n_z^* .

De gelijkvormigheid van de begin- en eindverplaatsingen kan automatisch worden vergeleken door de berekeningen iteratief uit te voeren.

Elke volgende iteratie gaat daarbij uit van de uitkomsten van de vorige, zodat de resultaten steeds nauwkeuriger worden. Het proces kan stoppen als de resultaten van twee opeenvolgende iteraties (nagenoeg) aan elkaar gelijk zijn geworden.

1	Schatting: uitbuigingslijn	v = totale verplaatsing (nagenoeg) sinusvormig	
2	Hieruit volgt:	M_{t2} torsiemoment	
3	„ „	φ rotatie: $\varphi = \int \frac{M_{t2}}{GI_t} dx$	
4	Uit 1 en 3 volgt	M_{z2} 2 ^{de} -orde moment $M_{z2} = M_{y1}\varphi + F_c v$	
5	Hieruit volgt:	kromming om de z-as $v_2'' = -\frac{M_{z2}}{EI_z}$	
6	„ „	v_2 verplaatsing 2 ^{de} -orde $v_2 = \iint v_2'' dx dx$	
7	Nieuw:	verplaatsing $v = (v_0 + v_1) + v_2$	
8	Herhaling:	proces wordt uitgevoerd in 20 iteraties tot vorm en grootte van v en v_2 niet meer veranderen	
9	Tenslotte:	2 ^{de} -orde term: $\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}}$	

figuur 5.2

Na berekening van n_z^* kan hiermee de grootte van de 2^{de}-orde effecten worden afgeleid, waarna de totale spanning kan worden bepaald en getoetst.

5.1 Staaf op twee steunpunten

5.1.1 Belast door een constant moment en een axiale drukkracht

Hoewel juist dit belastinggeval zich (als enige) leent voor een zuivere wiskundige oplossing wordt het hier ter introductie van de 'stappenplanmethode' als eerste behandeld, omdat de in te voeren vergelijkingen eenvoudig en overzichtelijk zijn. Omdat er geen andere belastingen zijn dan M_{y1} en F_c vervalt in (5.01) de component M_{x2} en blijven dus over om op te lossen:

buiging om de z-as	$M_{z2} = + F_c v + M_{y1} \varphi = - EI_z v_2''$	(5.02)
rotatie om de x-as	$M_{t2} = + M_{y1} v' = + GI_t \varphi'$	

De systematische uitwerking verloopt in 9 stappen als volgt:

1	Vervorming:	Aan te nemen als sinuslijn met 'top'waarde \bar{v} : $v = \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} \quad v_1 = 0 \quad \text{dus: } v = v_0 + v_2 \quad (5.03)$
2	Torsiemoment:	Ontstaat door: ontbinden van M_y - zie figuur 4.5: $M_{t2} = M_{y1} v' = M_{y1} \bar{v} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (5.04)$
3	Rotatie:	Is te berekenen uit de som van de opeenvolgende torsies: $\varphi' = \frac{M_{t2}}{GI_t} = \frac{M_{y1}}{GI_t} \bar{v} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (5.05)$ $\varphi = \int_0^x \varphi' dx = \frac{M_{y1}}{GI_t} \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} = \frac{M_{y1}}{GI_t} v \quad (5.06)$
4	2 ^{de} -ordemoment:	Ontstaat door: ontbinden van moment M_{y1} , dus: $M_{y1} \varphi$ en: axiaalkracht \times verplaatsing: $F_c v$ $M_{z2} = M_{y1} \frac{M_{y1}}{GI_t} v + F_c v = \left(\frac{M_{y1}^2}{GI_t} + F_c \right) \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.07)$
5	Kromming om de z-as: 2 ^{de} afgeleide v_2'' (met 'min' teken)	De algemene relatie tussen moment en kromming is: $v_2'' = - \frac{M_{z2}}{EI_z} = - \frac{\frac{M_{y1}^2}{GI_t} + F_c}{EI_z} \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.08)$

6	Uitbuiging van de 2 ^{de} -orde:	<p>Volgt uit twee maal (bepaald) integreren van de kromming:</p> $v_2 = \int_0^x \int_x^{0,5L} v_2'' dx dx = - \int_0^x \int_x^{0,5L} \frac{M_{y1}^2}{EI_z} + F_c \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} dx dx = \quad (5.09)$ $= \left(\frac{M_{y1}^2}{GI_t} + F_c \right) \frac{L^2}{EI_z \pi^2} \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L}$
7	Nieuwe uitbuiging	(alleen ter vergelijking van de vorm): $v_{\text{nieuw}} = v_0 + v_2$ (5.10)
8	Beoordeling gelijkvormigheid	De nieuwe uitbuigingslijn v_{nieuw} en de geschatte lijn v zijn beiden sinuslijnen en dus inderdaad gelijkvormig.
9	Term n_z^*	<p>De verhouding tussen \bar{v}_2 en \bar{v} is nu het eenvoudigst te berekenen als reciproque waarde:</p> $\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \left(\frac{M_{y1}^2}{GI_t} + F_c \right) \frac{L^2}{\pi^2 EI_z} \quad (5.11)$

Omdat bij dit belastinggeval de benodigde formules zijn gebaseerd op sinus- en cosinusfuncties kunnen zij alle eenvoudig analytisch worden opgelost en is er geen spreadsheet nodig om de benodigde berekeningen te maken.

Uit (4.03) volgt dat voor een waarde: $n_z^* = 1$ de vergrotingsfactor oneindig wordt. De situatie is dan kritisch.

Met alleen een axiale drukkracht F_c wordt bij $n_z^* = 1$ een kritische situatie gevonden met:

$$F_{c;kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (5.12a)$$

Hiermee is de bekende knikformule van Euler afgeleid uit de vervormingen, zodat dus ook kan worden geschreven:

$$\boxed{F_{c;kr} = F_{Ez}} \quad (5.12b)$$

Met alleen een constant moment M_y wordt bij $n_z^* = 1$ een kritische situatie gevonden met:

$$M_{y1;kr}^2 = \frac{\pi^2 EI_z GI_t}{L^2} = F_{Ez} GI_t = M_{kr}^2 \quad (5.13a)$$

waaruit volgt:

$$\boxed{M_{kr} = \sqrt{F_{Ez} GI_t}} \quad (5.13b)$$

wat in de literatuur meestal wordt genoemd het 'klassieke theoretisch elastische kipmoment' en ook vaak wordt genoteerd als:

$$M_{kip} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t} \quad (5.13c)$$

Voor alle mogelijke combinaties van een constant moment M_y en een axiale (druk)kracht F_c kunnen nu de 2^{de}-orde vervormingen op een eenvoudige en overzichtelijke manier worden ontleend aan (5.11).

De term n_z^* kan nu het eenvoudigst worden geschreven in reciproque waarde als:

$$\boxed{\frac{1}{n_z^*} = \left(\frac{M_{y1}}{M_{kr}} \right)^2 + \frac{F_c}{F_{Ez}}} \quad (5.14)$$

De 2^{de}-orde term bestaat dus uit twee (parallel geschakelde) componenten, een voor het moment en een voor de drukkracht. Dit is ook te schrijven als:

$$\boxed{\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{n_{zM}^*} + \frac{1}{n_{zF}^*}} \quad (5.15)$$

Hierin zijn:

$$\boxed{\frac{1}{n_{zM}^*} = \left(\frac{M_{y1}}{M_{kr}} \right)^2} \quad (5.15a)$$

en:

$$\boxed{\frac{1}{n_{zF}^*} = \frac{F_c}{F_{Ez}}} \quad (5.15b)$$

Treffend is hier de overeenkomst met de bekende constructie van verend ingeklemde staven, zoals bijvoorbeeld vrijstaande kolommen die in de fundering zijn ingeklemd of stabiliteitskernen van hoge gebouwen.

Bij deze constructies bestaat de 2^{de}-orde term (aangeduid met n) eveneens uit twee componenten (zie Bijlage 9.2), een voor de rotatiestijfheid van de veer en een voor de buigstijfheid van de staaf:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_{veer}} + \frac{1}{n_{staaf}} \tag{5.16}$$

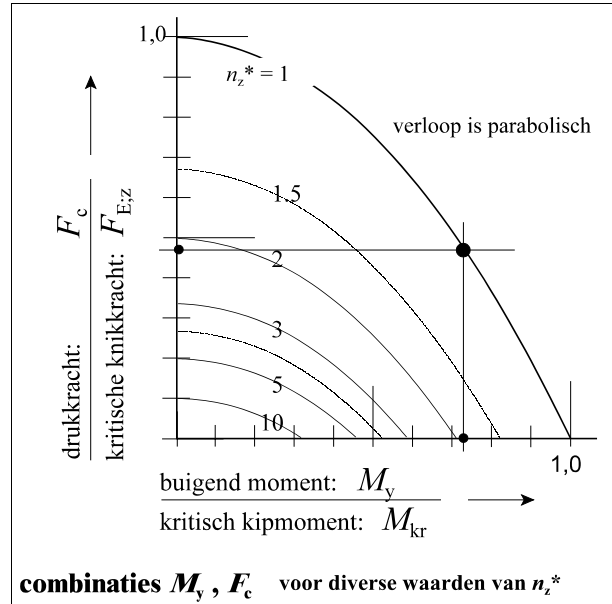
Uit (5.14) is af te leiden dat combinaties van moment en drukkracht een parabolisch verloop hebben.

Voor enige waarden van n_z^* wordt dit getoond in de grafiek van figuur 5.3.

In de uiterste grenstoestand met: $n_z^* = 1$ treden oneindig grote verplaatsingen op waarbij de staaf instabiel is geworden.

Voor $n_z^* > 1$ blijven de verplaatsingen eindig en bepaalt de materiaalsterkte of de beschouwde combinatie van M_y en F_c opneembaar is.

De sterketoets, die hierover uitsluitsel geeft, wordt behandeld in Hoofdstuk 8.



figuur 5.3

De waarde van de term n_z^* geeft dus op zich zelf nog geen directe informatie over de werkelijke bezwijkbelasting van de staaf, maar deze wordt gebruikt als hulpmiddel om de grootte van de 2^{de}-orde vervormingen, momenten en spanningen te bepalen.

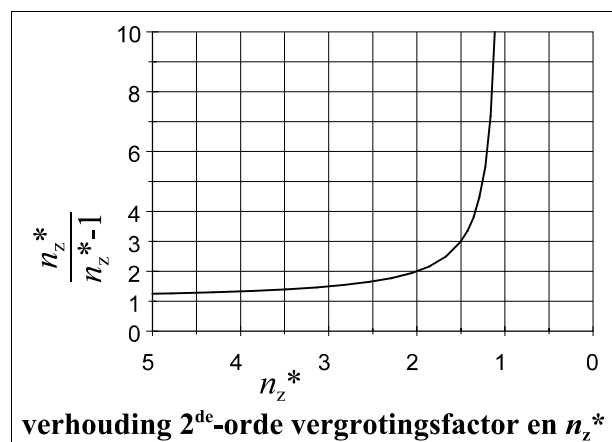
Daartoe wordt de in Hoofdstuk 4.2 afgeleide basisformule van de 2^{de}-orde effecten, waarmee iedere constructeur vertrouwd is, toegepast:

$$\bar{v} = \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} (\bar{v}_0 + \bar{v}_1) \tag{5.17}$$

De gevolgen van (te) kleine waarden van n_z^* zijn duidelijk af te lezen in figuur 5.4:

Bij waarden van n_z^* kleiner dan ongeveer 2 (en zeker als de grenswaarde dicht nadert tot de fatale waarde 1) nemen de vervormingen en dus ook de spanningen tot onacceptabele hoogte toe.

Er dreigt dan verlies van stabiliteit, gevolgd door instorten van de constructie.



figuur 5.4

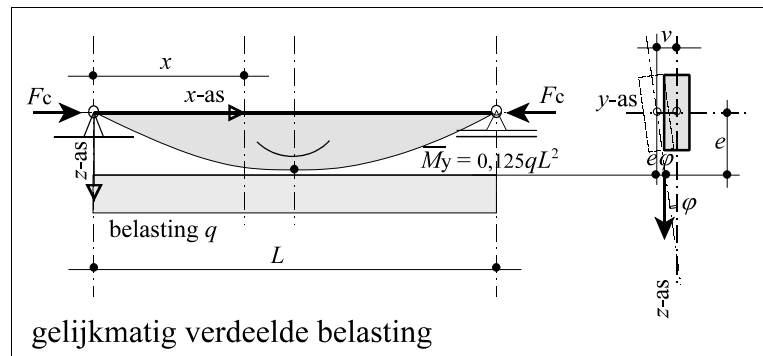
Dus:

Zelfs zonder de 2^{de}-orde vergrotingen zelf te berekenen geeft de term n_z^* al een zeer duidelijke indicatie van de betrouwbaarheid van de stabiliteit en is daardoor zeer efficiënt te benutten als alarmfunctie bij dreigend stabiliteitsverlies.

5.1.2 Staaf op twee steunpunten, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting en een axiale drukkracht

De staaf is van begin tot eind belast met een gelijkmatig verdeelde belasting die aangrijpt op een afstand e gemeten vanaf de staafas in de richting van de belasting. Zie figuren 4.4, 5.5 en 5.6.

Een positieve waarde van e heeft een gunstig effect omdat dan de doorsnede door de belasting als het ware wordt 'teruggedraaid' naar de oorspronkelijke positie, waardoor het torsiemoment wordt verkleind. Het omgekeerde geldt voor een negatieve waarde van e .

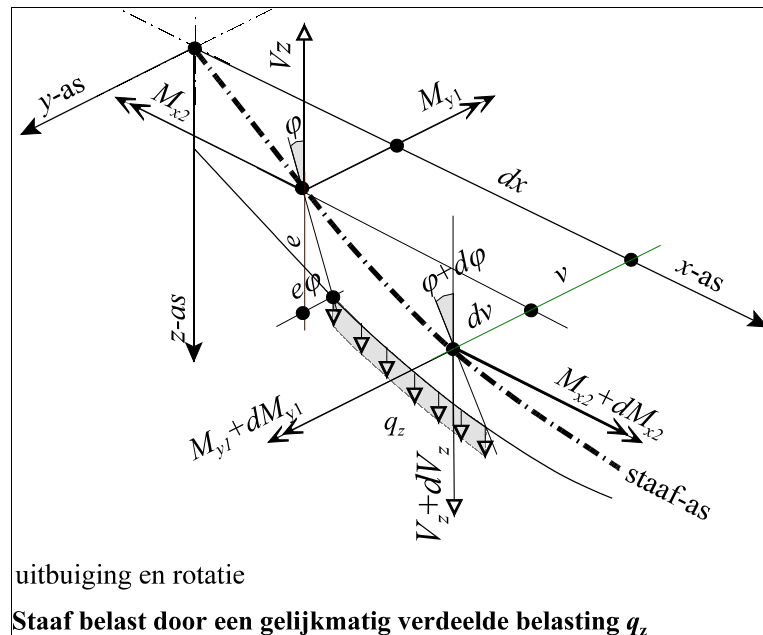


figuur 5.5

Het op te lossen stelsel vergelijkingen met de 2^{de}-orde momenten en -vervormingen is hiervoor al afgeleid in Hoofdstuk 4 (zie vergelijking (4.09) en figuur 4.7) en resulteert in:

buiging om de z-as	$M_{z2} = F_c v + M_{y1} \varphi = -EI_2 v_2''$	zie (5.01)
rotatie om de x-as	$M_{t2} = M_{y1} v' + M_{x2} = +GI_t \varphi'$	

Het torsiemoment vraagt nu speciale aandacht, omdat er een component bijkomt door de belasting in de z-richting die door de verplaatsing in de y-richting verschuift. Als deze belasting excentrisch ten opzichte van de staafas aangrijpt wordt het torsiemoment bovendien nog extra beïnvloed door de combinatie van de excentriciteit e en de rotatie van de doorsnede. Zie figuur 5.6:



figuur 5.6

Omdat het moment M_{y1} nu variabel is kan het stelsel niet meer worden opgelost met enkelvoudige sinus- en cosinusfuncties, maar moeten eraan de belasting aangepaste vergelijkingen worden opgesteld.

Het torsiemoment M_{t2} is samengesteld uit twee componenten:

$$M_{t2} = M_{y1}v' + M_{x2} \quad (5.18)$$

waarin: $M_{y1}v'$ volgt uit de ontbinding van M_{y2} ,
 M_{x2} volgt uit de verschuiving van de belasting, hetgeen is te ontleen aan het evenwicht van krachten en momenten op een staafdeeltje met lengte dx , zie figuur 5.6.

Uit het momentenevenwicht $\sum M_x$ volgt:

$$-M_{x2} + (M_{x2} + dM_{x2}) + (V_z + dV_z)dv + 0,5q_z dx dv - q_z dx \cdot e(\varphi + 0,5d\varphi) = 0 \quad (5.19)$$

Na eliminatie van de termen van hogere orde en na delen door dx blijft hiervan over:

$$\frac{dM_{x2}}{dx} + V_z \frac{dv}{dx} - q_z e \varphi = M'_{x2} + V_z v' - q_z e \varphi = 0$$

zodat:

$$M_{x2}' = -V_z v' + q_z e \varphi \quad (5.20)$$

Differentiëren van: M_{t2} uit de 2^{de} rij van (5.01) levert:

$$M_{t2}' = M_{y1} v'' + M_{y1}' v' + M_{x2}' = M_{y1} v'' + M_{y1}' v' - V_z v' + q_z e \varphi \quad (5.21)$$

Omdat: $M_{y1}' = V_z$ geldt dus: $M_{y1}' - V_z = 0$ waarna tenslotte volgt:

$$M_{t2}' = M_{y1} v'' + q_z e \varphi \quad (5.22)$$

Deze 'aangroei' van het torsiemoment wordt in stap 2 van het stappenplan ingevuld, waarna door (numerieke) integratie het torsiemoment over de lengte van de staaf kan worden berekend.

De verdere uitwerking verloopt nu volgens hetzelfde schema als bij het vorige belastinggeval. De juiste waarden van vervormingen en momenten zijn berekend met een spreadsheet, waarbij (uitgaande van de initiële vervorming) in een aantal iteraties de uiteindelijke toestand zo dicht wordt benaderd, dat er over het gehele staafverloop geen verschillen meer optreden ten opzichte van de voorgaande iteratie. Daarmee wordt automatisch voldaan aan stap 8 (vergelijking van de aangenomen en bereikte vorm) van het schema.

Ter verduidelijking van de resultaten zijn in het schema grafieken opgenomen van het verloop van de berekende vervormings- en/of momentenlijnen.

Op de horizontale as is uitgezet de staafas met daarin de waarden van x/L ,

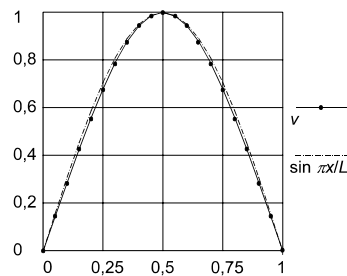
Op de verticale as zijn uitgezet de waarden van: de vervormingen respectievelijk momenten ten opzichte van hun 'top'waarden gecombineerd met zuivere sinus- of cosinuslijnen, waarbij is te zien dat overal de onderlinge afwijkingen klein tot zeer klein zijn.

Ter vereenvoudiging van de notaties wordt nu een reeks hulpfuncties g_{1a} , g_{1b} , enzovoort geïntroduceerd, waarmee de verhouding tussen het werkelijke verloop van de vervormings- of momentenlijnen ten opzichte van zuivere sinus- of cosinuslijnen in rekening wordt gebracht. Gezien de optredende kleine verschillen kunnen deze hulpfuncties nagenoeg als constanten worden beschouwd.

Uiteindelijk blijken al deze hulpfuncties te kunnen worden samengevat in slechts twee constante factoren k_1 en k_2 , die per belastinggeval worden ontleend aan de uitkomsten van de berekeningen, waarvan de laatste iteratie in tabelvorm is weergegeven in Bijlage 5.1.2.

De systematische uitwerking verloopt nu op dezelfde wijze als besproken in Hoofdstuk 5.1.1 in 9 stappen als volgt:

1 Vervorming:



figuur 5.7

Begonnen wordt meteen initiële sinuslijn waarbij de 'top'waarde (in orde van grootte ca. 1 à 3 %o van de staaflengte) bij ontbreken van exacte gegevens kan worden ontleend aan de van toepassing zijnde normen:

$$v_0 = \bar{v}_0 \sin \frac{\pi x}{L} \tag{5.23}$$

Bij de 2^{de} en volgende iteraties wordt hierbij opgeteld een steeds nauwkeuriger wordende 2^{de}-orde uitbuiging v_2 .

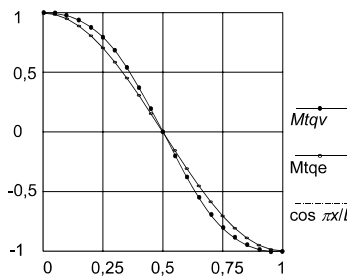
Vooruitlopend op het berekeningsresultaat (na 20 iteraties) wordt in figuur 5.6 alvast het eindresultaat v getoond dat kan worden benaderd als:

$$v = \bar{v} g_{1a} \sin \frac{\pi x}{L} \tag{5.24}$$

Met de hulpfunctie g_{1a} wordt de verhouding tussen het werkelijke verloop van v en een zuivere sinuslijn in rekening gebracht. Uit figuur 5.7 is af te leiden dat de waarde van deze verhouding overall nagenoeg 1 is.

N.B. De kromme in figuur 5.7 toont dus niet de initiële v_0 uitbuiging maar de eindsituatie v .

2 Torsiemoment:



figuur 5.8

Wordt berekend door integreren van M_t' (zie hiervoor):

$$M_{t2} = \int_{0,5L}^x (M_{y1} v'' + q_z e \varphi) dx \tag{5.25}$$

Gestart wordt met: $v'' = v_0''$ en: φ (voorlopig) = 0.

Bij volgende iteraties worden de waarden van $v'' = v_0'' + v_2''$ en φ steeds nauwkeuriger totdat ze tenslotte niet meer veranderen en de eindsituatie is bereikt.

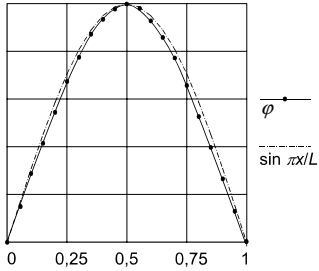
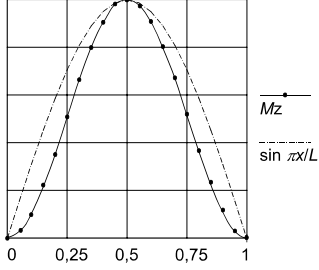
Het maximale torsiemoment bij de (gaffel)opleggingen is:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{t2} &= \bar{M}_{tqv} + \bar{M}_{tqe} = q \left(\int_0^{0,5L} v dx - e \int_0^{0,5L} \varphi dx \right) = \\ &= \frac{q}{\pi} (g_{1b} \bar{v} - g_{2b} e \bar{\varphi}) = \frac{8 \bar{M}_{y1}}{\pi L} (g_{1b} \bar{v} - g_{2b} e \bar{\varphi}) \end{aligned} \tag{5.26}$$

In figuur 5.8 zijn beide componenten van M_{t2} afzonderlijk weergegeven. Het verloop wijkt niet veel af van een cosinuslijn waarbij opvalt dat de 2^{de} component zeer nauwkeurig de cosinuslijn volgt.

Het torsiemoment kan dus goed worden benaderd met:

$$M_{t2} = \frac{8 \bar{M}_{y1}}{\pi L} (g_{1c} \bar{v} - g_{2c} e \bar{\varphi}) \cos \frac{\pi x}{L} \tag{5.26a}$$

<p>3 Rotatie:</p>  <p>figuur 5.9</p>	<p>Is te berekenen uit de som van de opeenvolgende torsies:</p> $\varphi' = \frac{M_{t2}}{GI_t} \text{ en daarna: } \varphi = \int_0^x \varphi' dx$ <p>dus: $\varphi = \frac{8\bar{M}_{y1}}{GI_t \pi^2} (g_{1d} \bar{v} - g_{2d} e \bar{\varphi}) \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.27)$</p> <p>De 'top'waarde $\bar{\varphi}$ geldt bij: $\frac{x}{L} = 0,5$ met: $\sin \frac{\pi x}{L} = 1$</p> $\bar{\varphi} = \frac{\frac{8\bar{M}_{y1}}{GI_t \pi^2} g_{1d} \bar{v}}{1 + \frac{8\bar{M}_{y1}}{GI_t \pi^2} g_{2d} e} = \frac{0,81\bar{M}_{y1} g_{1d}}{GI_t + 0,81\bar{M}_{y1} g_{2d} e} \bar{v} \quad (5.28)$ $\varphi = \frac{0,81\bar{M}_{y1} g_{1e}}{GI_t + 0,81\bar{M}_{y1} g_{2d} e} \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.29)$ <p>In figuur 5.9 is te zien dat het verloop van de rotatie nagenoeg sinusvormig is.</p>
<p>4 2^{de}-orde moment:</p>  <p>figuur 5.10</p>	$M_{z2} = M_{y1} \varphi + F_c v =$ $= \left(\frac{0,81\bar{M}_{y1}^2 \frac{4x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) g_{1e}}{GI_t + 0,81\bar{M}_{y1} g_{2d} e} + F_c g_{1a} \right) \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.30)$ <p>Dit is te schrijven met een nieuwe (nagenoeg parabolische) verhoudingsfunctie g_{1f} en met $g_{1a} =$ (nagenoeg) 1 als:</p> $M_{z2} = \left(\frac{\bar{M}_{y1}^2 g_{1f}}{GI_t + 0,81\bar{M}_{y1} g_{2d} e} + F_c \right) \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.31)$ <p>In figuur 5.10 is te zien dat er nu wel verschillen zijn tussen deze M-lijn en een zuivere sinuslijn waarmee rekening moet worden gehouden.</p>
<p>5 Kromming om de z-as:</p>	$v_2'' = -\frac{M_{z2}}{EI_z} \quad (5.32)$

6 Uitbuiging 2 ^{de} -orde:	$v_2 = \int_0^x \int_x^{0,5L} v_2'' dx dx = - \int_0^x \int_x^{0,5L} \frac{Mz}{EI_z} dx dx =$ $= \left(\frac{\bar{M}_{y1}^2 g_{1g}}{GI_t + 0,81\bar{M}_{y1} g_{2d} e} + F_c g_{1h} \right) \bar{v} \frac{L^2}{\pi^2 EI_z} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.33)$
7 Nieuwe uitbuiging:	$v_{nw} = v_0 + v_2$
8 Gelijkvormigheid:	Ondanks de in stap 4 geconstateerde verschillen tussen de M_z -lijn en een zuivere sinuslijn blijkt er toch (na tweemaal integreren) een nieuwe uitbuigingslijn v_{nw} te ontstaan die weer nagenoeg sinusvormig is. Zie figuur 5.5.
9 Term n_z^* :	<p>Analoog aan het vorige belastinggeval (met constant moment) ontstaat een vergelijkbare formule, maar nu met een extra term ten gevolge van de excentriciteit van de belasting:</p> $\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{\bar{M}_{y1}^2 g_{1g}}{F_{Ez} GI_t + 0,81\bar{M}_{y1} g_{2d} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (5.34)$ <p>De waarden van de overblijvende verhoudingsfuncties blijken enigszins afhankelijk van de grootte van M_y, e en F_c, maar zijn beide toch nagenoeg constant. Daarom kan de formule voor n_z^* worden geschreven als:</p> $\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (5.35)$

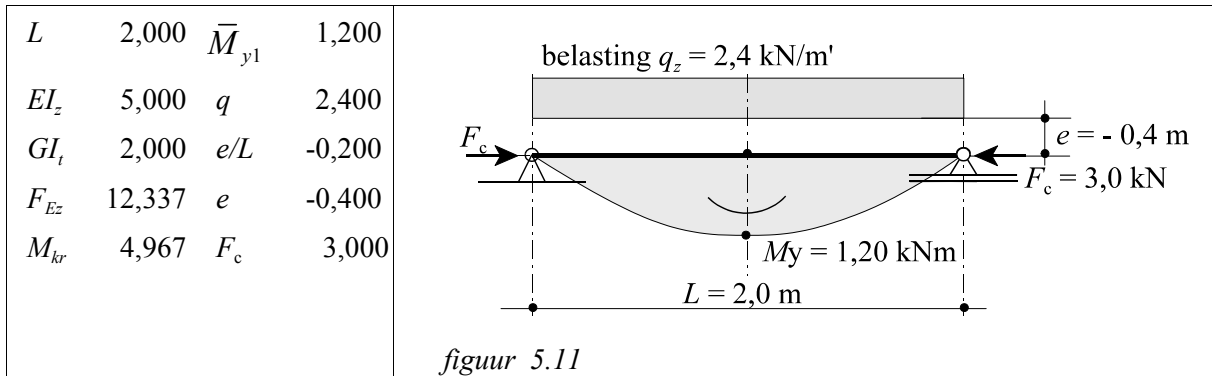
In Bijlage 5.1.2 wordt afgeleid dat de waarden van de in te voeren factoren zijn:

$$\boxed{k_1 = 0,88} \quad \text{en} \quad \boxed{k_2 = 0,81} \quad (5.36)$$

zodat voor een gelijkmatig verdeelde belasting de term n_z^* kan worden berekend met:

$$\boxed{\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,88\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,81\bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}}} \quad (5.37)$$

Als toepassingsvoorbeeld volgt een staaf met willekeurige eigenschappen en belastingen:



uitwerking:

De resultaten van de spreadsheetberekening zijn opgenomen in Bijlage 5.1.2.

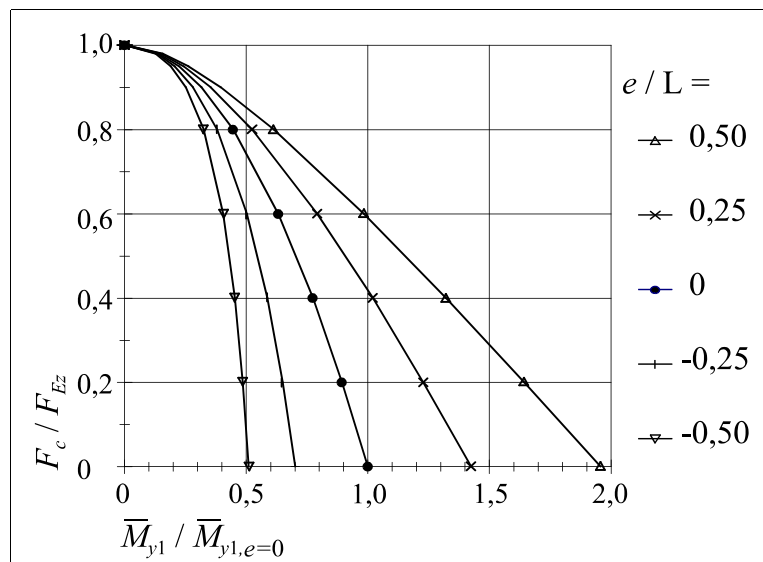
Aan de gevonden verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is te ontleen: $n_z^* = \frac{1,423}{0,423} = 3,36$

Met de ontwikkelde formule wordt dit:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,88 \times 1,200)^2}{4,967^2 - 0,81 \times 1,200 \times 0,400 \times 12,337} + \frac{3,000}{12,337} = \frac{1,115}{24,671 - 4,797} + 0,243 = 0,056 + 0,243 = 0,299 = \frac{1}{3,34}$$

Het verschil tussen 3,36 en 3,34 is slechts 0,7%.

De invloed van de axiale drukkracht (uitgedrukt in de verhouding F_c/F_{Ez}) en de excentriciteit e/L van de dwarsbelasting op de eigenwaarde hiervan (uitgedrukt in $\bar{M}_{y1}/\bar{M}_{y1}$ als $F_c = e = 0$) wordt weergegeven in de grafiek van figuur 5.12:



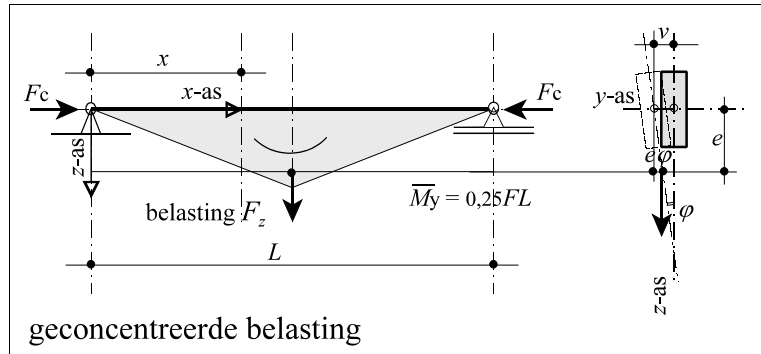
figuur 5.12

Als de belasting aangrijpt in het zwaartepunt van de doorsnede (de lijn met bolletjes voor een excentriciteit: $e = 0$) is eenzelfde paraboelvorm te herkennen als in figuur 5.3 voor het belastinggeval met constant moment.

De overige lijnen (met: $e \neq 0$) zijn combinaties van parabolen en hyperbolen.

5.1.3 Staaf op twee steunpunten, belast door een geconcentreerde belasting in het midden van de staaf en een axiale drukkracht

Van toepassing zijn dezelfde uitgangspunten als bij een gelijkmatig verdeelde belasting. Voor het schema: zie figuur 5.13.



figuur 5.13

Het op te lossen stelsel vergelijkingen is onveranderd:

buiging om de z-as	$M_{z2} = + F_c v + M_{y1} \varphi = - EI_2 v_2''$	zie (5.01)
rotatie om de x-as	$M_{t2} = + M_{y1} v' + M_{x2} = + GI_t \varphi'$	

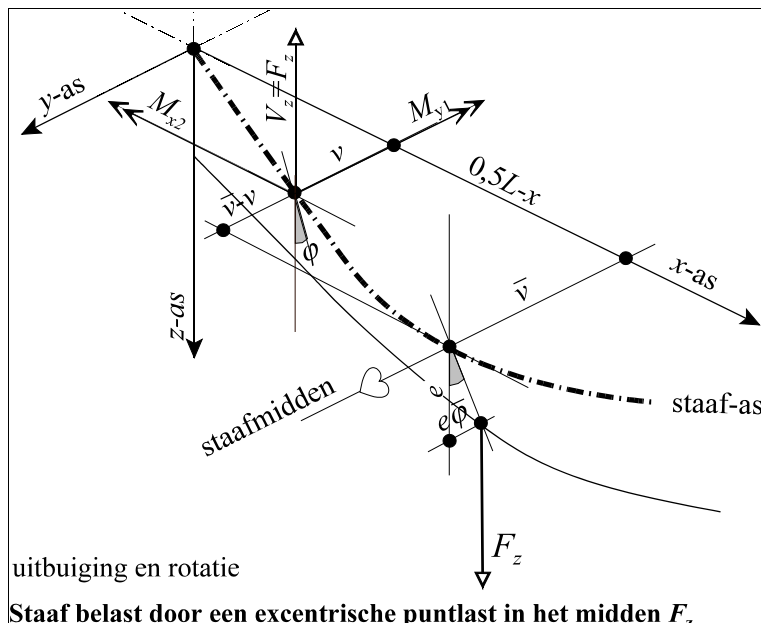
Het torsiemoment is nu iets eenvoudiger te berekenen omdat de in Hoofdstuk 5.1.2 voorkomende component $qe\varphi$ hier niet aanwezig is in de vergelijking van M_t' . Zie figuur 5.14.

In plaats daarvan bevat het torsiemoment M_t links respectievelijk rechts van het staafmidden een constante term met de waarde:

$$M_{t,x=0,499L} = -0,5Fe\bar{\varphi}$$

respectievelijk:

$$M_{t,x=0,501L} = +0,5Fe\bar{\varphi}$$



figuur 5.14

Het verloop van M_t volgt dan uit:

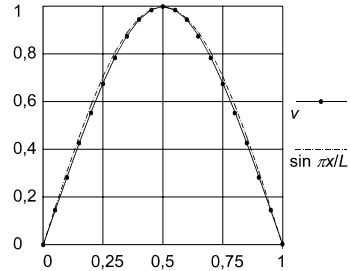
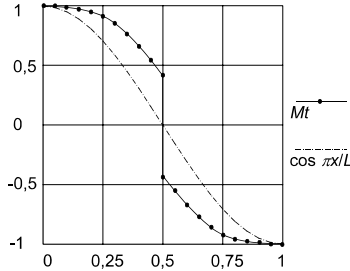
$$M_t = \int_{0,5L}^x M_t' dx \mp 0,5Fe\bar{\varphi} = \int_{0,5L}^x M_{y1} v'' dx \mp 0,5Fe\bar{\varphi} \quad (5.38)$$

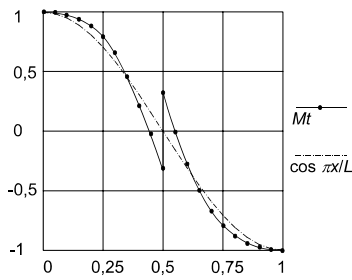
De verdere procedure is geheel vergelijkbaar met het eerder ontwikkelde 'stappenplan' met hulpfuncties die ook hier uiteindelijk overgaan in constanten.

Omdat het schema met de negen stappen in principe dezelfde structuur heeft als bij het geval met een gelijkmatig verdeelde belasting worden in het volgende schema vooral de verschillen getoond. De grafieken in de linker kolom zijn waar nodig getekend voor zowel een negatieve als een positieve (zeer grote) excentriciteit van: $e \mp 0,5L$.

De berekeningen zijn opgenomen in Bijlage 5.1.3.

De systematische uitwerking verloopt weer in negen stappen als volgt:

<p>1 Vervorming:</p>  <p>figuur 5.15</p>	<p>Begonnen wordt weer meteen initiële sinuslijn:</p> $v_0 = \bar{v}_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad \text{zie (5.23)}$ <p>Vooruitlopend op het berekeningsresultaat (na 20 iteraties) wordt in figuur 5.13 alvast het eindresultaat v getoond dat kan worden benaderd als:</p> $v = \bar{v} g_{1a} \sin \frac{\pi x}{L} \quad \text{zie (5.24)}$ <p>In de grafiek is er (evenals bij het geval met gelijkmatig verdeelde belasting) nauwelijks verschil te zien tussen het verloop van v en een zuivere sinuslijn.</p>
<p>2 Torsiemoment:</p>  <p>figuur 5.16a $e/L = -0,5$</p>	<p>Bij de (gaffel)opleggingen geldt:</p> $\begin{aligned} \bar{M}_{t2} &= \bar{M}_{tFv} + \bar{M}_{tFe} = \\ &= 0,5F(\bar{v} - e\bar{\varphi}) = \frac{2\bar{M}_{y1}}{L}(\bar{v} - e\bar{\varphi}) \end{aligned} \quad (5.39)$ <p>In het staafmidden (links) geldt: $M_{t2} = -0,5Fe\bar{\varphi}$ In de rechter staafhelft wisselt het teken. Het verloop van het torsiemoment wordt berekend door integreren van M_t' (zie hiervoor):</p> $M_{t2} = \int_{0,5L}^x M_{y1} v'' dx \quad (5.40)$ <p>In de figuren 5.16a en 5.16b is het resultaat weergegeven.</p>

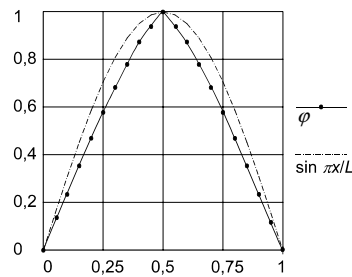


figuur 5.16b $e/L = +0,5$

De afwijkingen van een zuivere cosinuslijn zijn vrij groot, maar dat wordt weer verdisconteerd met de hulpfuncties g . Het torsiemoment kan dus weer worden benaderd met:

$$M_{t2} = \frac{2\bar{M}_{y1}}{\pi L} (g_{1c}\bar{v} - g_{2c}e\bar{\varphi}) \cos \frac{\pi x}{L} \quad (5.41)$$

3 Rotatie:



figuur 5.17a $e/L = -0,5$

Is te berekenen uit de som van de opeenvolgende torsies:

$$\varphi' = \frac{M_{t2}}{GI_t} \quad \text{en daarna:} \quad \varphi = \int_0^x \varphi' dx$$

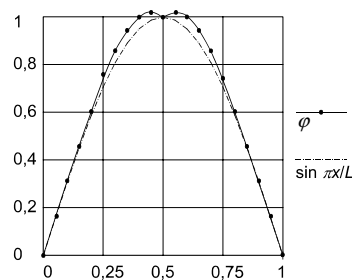
$$\varphi = \frac{2\bar{M}_{y1}}{GI_t \pi^2} (g_{1d}\bar{v} - g_{2d}e\bar{\varphi}) \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.42)$$

In de figuren 5.17a en 5.17b is te zien dat de benadering als een sinuslijn zeker niet nauwkeurig is maar dank zij de hulpfuncties g wel bruikbaar is.

De 'top'waarde $\bar{\varphi}$ geldt bij: $\frac{x}{L} = 0,5$ en dus: $\sin \frac{\pi x}{L} = 1$

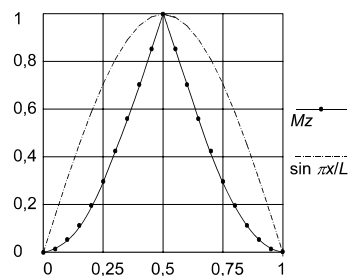
$$\bar{\varphi} = \frac{\frac{2\bar{M}_{y1}}{GI_t \pi^2} g_{1d}\bar{v}}{1 + \frac{2\bar{M}_{y1}}{GI_t \pi^2} g_{2d}e} = \frac{0,20\bar{M}_{y1}g_{1d}}{GI_t + 0,20\bar{M}_{y1}g_{2d}e} \bar{v} \quad (5.43)$$

$$\varphi = \frac{0,20\bar{M}_{y1}g_{1e}}{GI_t + 0,20\bar{M}_{y1}g_{2d}e} \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.44)$$



figuur 5.17b $e/L = +0,5$

4 2^{de}-orde moment:



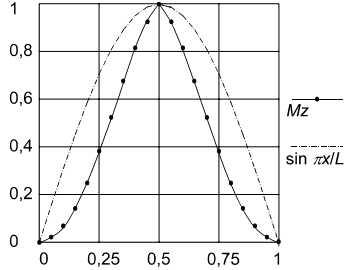
figuur 5.18a $e/L = -0,5$

Voor het linker staafdeel geldt:

$$M_{z2} = M_{y1}\varphi + F_c v =$$

$$= \left(\frac{0,20\bar{M}_{y1}^2 \frac{2x}{L} g_{1e}}{GI_t + 0,20\bar{M}_{y1}g_{2d}e} + F_c g_{1a} \right) \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.45)$$

Omdat het \bar{M} -verloop in het rechter staafdeel hiermee symmetrisch is kan e.e.a. worden geschreven met een nieuwe verhoudingsfunctie g_{1f} en met $g_{1a} =$ (nagenoeg) 1 als:

 <p>figuur 5.18b $e/L = +0,5$</p>	$M_{z2} = \left(\frac{\bar{M}_{y1}^2 g_{1f}}{GI_t + 0,20\bar{M}_{y1}g_{2d}e} + F_c \right) \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.46)$ <p>In de figuren 5.18a en 5.18b is te zien dat deze er nu wel aanmerkelijke verschillen zijn tussen deze M-lijnen en een zuivere sinuslijn. Omdat de werkelijke berekening m.b.v. de spreadsheet zeer nauwkeurig verloopt is er geen enkel bezwaar hiermee verder te gaan.</p>
5 Kromming om de z-as:	$v_2'' = -\frac{M_{z2}}{EI_z} \quad \text{zie (5.32)}$
6 Uitbuiging 2 ^{de} -orde:	$v_2 = \int_0^x \int_x^{0,5L} v_2'' dx dx = -\int_0^x \int_x^{0,5L} \frac{Mz}{EI_z} dx dx =$ $= \left(\frac{\bar{M}_{y1}^2 g_{1g}}{GI_t + 0,20\bar{M}_{y1}g_{2d}e} + F_c g_{1h} \right) \bar{v} \frac{L^2}{\pi^2 EI_z} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.47)$
7 Nieuwe uitbuiging:	$v_{nw} = v_0 + v_2$
8 Gelijkvormigheid:	<p>Ondanks de in stappen 3 en 4 geconstateerde verschillen van de rotatielijn en de M_z-lijn met een zuivere sinuslijn blijkt er toch na tweemaal integreren in 20 iteraties een nieuwe uitbuigingslijn v_{nw} te ontstaan die congruent is met de geschatte lijn v en dus eveneens nagenoeg sinusvormig is, zoals getoond wordt in figuur 5.15</p>
9 Factor n_z^* :	<p>Analoog aan het vorige belastinggeval (met een gelijkmatig verdeelde belasting) ontstaat een identieke formule, waarvan alleen de drie verhoudingsfuncties een bij dit belastinggeval behorende waarde hebben:</p> $\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{\bar{M}_{y1}^2 g_{1g}}{F_{Ez} GI_t + 0,20\bar{M}_{y1}g_{2d}e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (5.48)$ <p>De overblijvende verhoudingsfuncties blijken ook hier enigszins afhankelijk van de grootte van M_{y1}, e en F_c, maar zijn beide toch nagenoeg constant. Daarom kan de formule voor n_z^* worden geschreven als:</p> $\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad \text{zie (5.35)}$

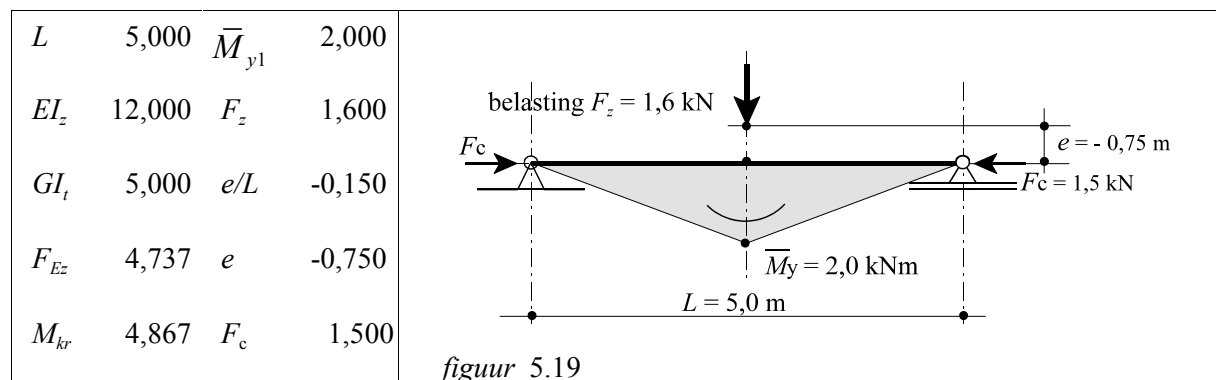
In Bijlage 5.1.3 wordt afgeleid dat waarde van de in te voeren factoren zijn:

$$\boxed{k_1 = 0,73} \text{ en } \boxed{k_2 = 0,87} \quad (5.49)$$

zodat voor een puntlast in het staafmidden de term n_z^* kan worden berekend met:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,73\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,87\bar{M}_{y1}eF_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (5.50)$$

Als toepassingsvoorbeeld volgt een staaf met willekeurige eigenschappen en belastingen:



uitwerking:

De resultaten van de spreadsheet zijn opgenomen in Bijlage 5.1.3.

Aan de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is nu te ontleen: $n_z^* = \frac{1,768}{0,768} = 2,30$

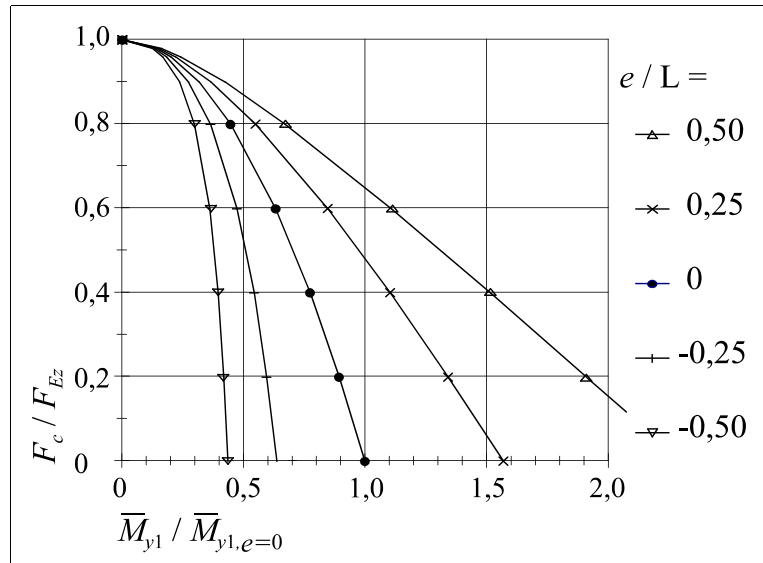
Met de ontwikkelde formule (5.49) wordt dit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_z^*} &= \frac{(0,73 \times 2,00)^2}{4,867^2 - 0,87 \times 2,00 \times 0,75 \times 4,737} + \frac{1,50}{4,737} = \frac{2,132}{23,688 - 6,182} + 0,317 = \\ &= 0,122 + 0,317 = 0,438 = \frac{1}{2,28} \end{aligned}$$

Het verschil tussen 2,30 en 2,28 is slechts 0,9%.

Vergelijkbaar met figuur 5.10 voor een q -last worden nu de invloeden van een axiale drukkracht en de excentriciteit op de eigenwaarde van het moment ten gevolge van een puntlast weergegeven in de grafiek van figuur 5.20:

In de lijn voor: $e = 0$ is weer de paraboolvorm te herkennen. Bij een F -last blijkt de invloed van de excentriciteit ca. 10 % groter te zijn dan bij een q -last.



figuur 5.20

5.2 Uitkraging

Bij dit constructietype is het wat lastiger om een bevredigende benadering van de vormen van uitbuiging en rotatie (en hun afgeleiden) te vinden dan bij de hiervoor beschouwde staaf op twee steunpunten.

Als eerste inschatting van de vorm van de vervormingslijnen is het verleidelijk om (naar analogie van de staaf op twee steunpunten) er weer van uit te gaan dat v en ϕ benaderd kunnen worden als (co)sinuslijnen, zie figuur 5.21:

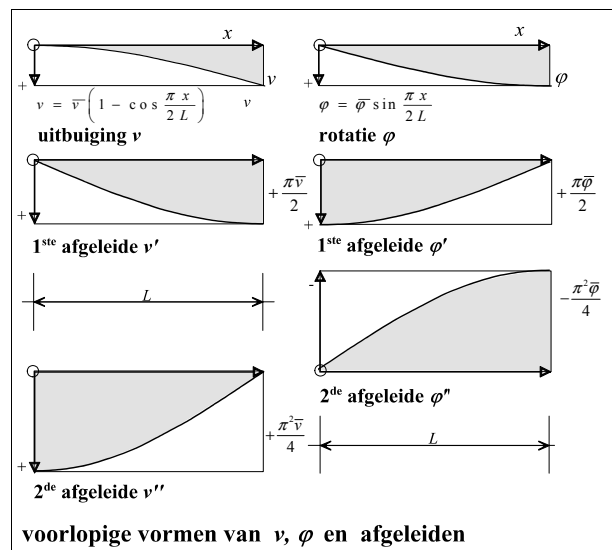
$$v = \bar{v} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \quad \text{en:} \quad \phi = \bar{\phi} \sin \frac{\pi x}{2L} \tag{5.51}$$

De afgeleiden zijn weergegeven de figuur.

De v' - en ϕ' -lijnen voldoen weliswaar aan de randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad v' = 0, \quad \phi' = \max \quad (M_t = \max) \\ x = L, \quad v' = \max, \quad \phi' \neq 0 \end{aligned}$$

maar de vormen zijn twijfelachtig:



figuur 5.21

Bij de meest voorkomende belastingen zal het torsiemoment M_t dicht bij het oplegpunt veel sneller afnemen dan bij het staafeinde. Voor de daarmee evenredige torsie φ' komt dan een 'holle' vorm beter overeen met het werkelijk gedrag dan de 'bolle' cosinusvorm in figuur 5.21. De 2^{de} afgeleiden v'' en φ'' voldoen echter niet aan de randvoorwaarden:

v'' : Bij uitsluitend een axiale drukkracht is dit wel een aannemelijke vorm, maar zonder een dwarsbelasting in de zwakke richting en/of een axiale drukkracht moet voor: $x = 0$ gelden: $M_z = 0$, dus ook: $v'' = 0$ wegens de relatie:

$$M_z = M_{y1}\varphi = -EI_z v''_2 = -EI_z (v'' - v''_0 - v''_1)$$

De cosinusfunctie voor v'' voldoet hieraan niet.

φ'' : Omdat bij het staafeind ($x = L$) de welving van de doorsnede niet wordt verhinderd moet daar gelden: $\varphi'' = 0$. De sinusfunctie voor φ'' voldoet hieraan niet.

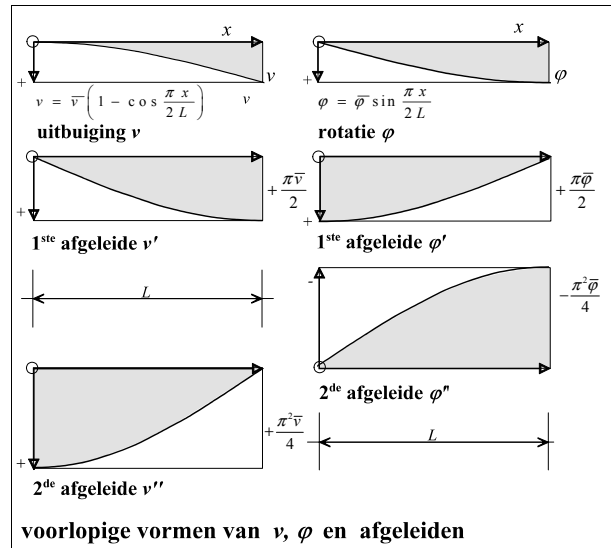
Een betere benadering is dus nodig, waarbij voldaan moet worden aan de volgende uitgangspunten en randvoorwaarden:

	vorm	$x = 0$	$x = L$
v	ongeveer zoals in figuur 5.21	0	max
v'	idem	0	max
v''	zonder axiale drukkracht en/of dwarsbelasting moet het maximum liggen ergens tussen: $0,1 L < x < 0,5L$	0	0
φ	ongeveer zoals in figuur 5.21	0	max
φ'	over het laatste kwart van de uitkraging neemt, bij de meeste belastinggevallen, de rotatie nauwelijks meer toe, dus moet de torsie φ' daar zeer klein zijn, dus is een 'holle' vorm wenselijk. (zie ook verder bij φ'')	max	0
φ''	de ongehinderde welving aan het staafeind vraagt hier: $\varphi'' = 0$ (voor verklaring: zie Bijlage 3)	max	0
φ'''	Bij het totale torsiemoment: $M_t = GI_{torsie}\varphi' - EI_{welving}\varphi'''$ wordt weliswaar de bijdrage van de verhinderde welving verdisconteerd in de torsiestijfheid GI_t , dus moet φ''' bij voorkeur overal negatief zijn. Overigens is het goed denkbaar dat in de nabijheid van het staafeind φ' en φ''' beiden positief zijn waardoor de beide componenten van M_t elkaar (gedeeltelijk) opheffen en er dus toch geen (of een zeer klein) torsiemoment M_t resteert.	max	0

Proberenderwijs is voor v'' en voor de torsielij φ als voorlopige benadering gevonden:

$$v'' = C_v \sin \frac{\pi x}{L} \quad \text{en:} \quad \varphi' = C_\varphi \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (5.52)$$

Zie figuur 5.22:



figuur 5.22

Het blijft echter nodig aan v een term toe te voegen om de invloed in rekening te brengen van een eventuele axiaalkracht en/of dwarsbelasting, waarvan de tweede afgeleide v'' bij de inklemming niet gelijk nul is.

Daarvoor kan de v -lijn volgens de eerste inschatting (zie figuur 5.21) dienst doen.

Zodoende wordt voor de v -lijn gekozen voor een combinatie van twee termen waarvan de onderlinge verdeling afhankelijk is van de optredende belasting.

Na integreren en/of differentiëren en aanpassen aan de randvoorwaarden resulteert dit in:

$$\begin{aligned}
 v &= \bar{v} \left\{ (1-a) \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L} \right) + a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \right\} & \varphi &= \frac{\bar{\varphi}}{(\pi-2)} \left\{ \frac{\pi x}{L} - 2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \right\} \\
 v' &= \frac{\bar{v}}{L} \left\{ (1-a) \left(1 - \cos \frac{\pi x}{L} \right) + a \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2L} \right\} & \varphi' &= \frac{\bar{\varphi} \pi}{L(\pi-2)} \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2L} \right) \\
 v'' &= \frac{\bar{v} \pi}{L^2} \left\{ (1-a) \sin \frac{\pi x}{L} + a \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi x}{2L} \right\} & \varphi'' &= \frac{\bar{\varphi} \pi^2}{2L^2(\pi-2)} \left(-\cos \frac{\pi x}{2L} \right)
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

Hierin neemt de factor a toe met de grootte van een eventuele axiale drukkracht en/of dwarsbelasting in de 'zwakke' richting.

De v -lijn en de afgeleiden daarvan zijn dus samengesteld uit een deel volgens figuur 5.22 voor het aandeel van een dwarsbelasting en figuur 5.21 voor het aandeel van een axiale kracht.

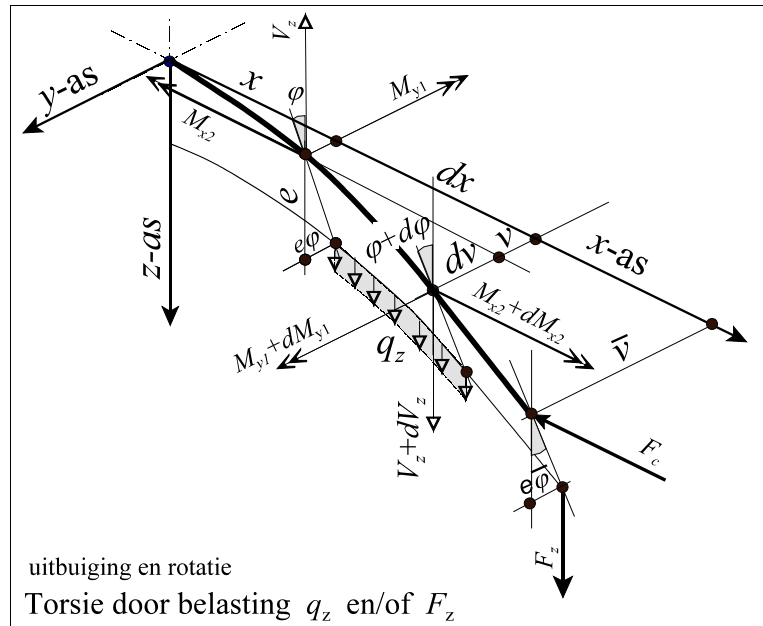
De φ -lijn komt geheel overeen met figuur 5.22.

N.B. Bij verdere uitwerking zal blijken (evenals bij de eerste aannamen bij de staaf op twee steunpunten) dat dit nog niet nauwkeurig genoeg is. Bij de behandeling van de analytische methode in hoofdstuk 6 komt dit nader aan de orde.

Het kenmerkende van dit stappenplan is echter, dat door het iteratieproces 'vanzelf' de juiste vorm wordt bereikt, zodat het niet nodig is om deze bij voorbaat al in te voeren.

Evenals bij een staaf op twee steunpunten wordt er weer van uit gegaan dat de invloed van de vervorming in de 'sterke' richting kan worden verwaarloosd, dat een eventuele dwarsbelasting in de 'zwakke' richting geen invloed heeft op de berekening van n_z^* .

De relatie tussen belastingen, momenten en vervormingen is weergegeven in figuur 5.23:



figuur 5.23

Het op te lossen stelsel vergelijkingen is nagenoeg identiek aan (5.1) en wordt geschreven als:

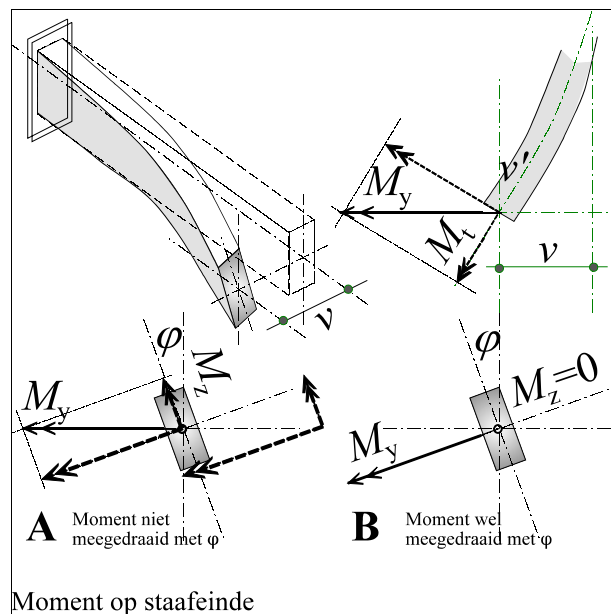
buiging om de z-as	$M_{z2} = F_c (v - \bar{v}) + M_{y1} \phi = -EI_z v'' / n_z^*$	(5.54)
torsie om de x-as	$M_{t2} = M_{y1} v' + M_{x2} = GI_t \phi'$	

Evenals bij de staaf op twee steunpunten wordt dit nu verder uitgewerkt in een stappenplan, ondersteund door spreadsheetberekeningen.

5.2.1 Uitkraging, belast door een constant moment en een axiale drukkracht

Voor dit basisgeval met alleen een constant moment veroorzaakt door M_y aangebracht op het staafeinde zijn twee situaties mogelijk, waarbij het moment wel of niet meedraait met de rotatie van het staafeind.

Zie figuur 5.24 A en B.



figuur 5.24

A. *Het moment draait niet mee met de rotatie*

Het is niet goed denkbaar hoe een (niet met het staafeind meedraaiend) moment M_y is aan te brengen. Theoretisch zou dan het staafeind roteren (zie in figuur 5.24 geval A) in de richting van het torsiemoment M_t terwijl hierdoor een ontbonden moment: $M_{z2} = M_{y1}\varphi$ ontstaat, dat de staaf weer terugbuigt naar de rechte positie. De kritische belasting is daardoor aanzienlijk kleiner dan wanneer het moment wel meedraait, zoals wordt behandeld in het volgende geval.

B. *Het moment draait wel mee met de rotatie*

Dit geval kan relatief eenvoudig beschouwd worden door het y - en z -assenstelsel denkbeeldig met de rotatie φ te laten meedraaien.

Praktisch zou dit bij voorbeeld uitvoerbaar zijn als een 'galgconstructie', zoals een vrijstaande kolom die aan de voet is ingeklemd en aan de kop is voorzien van een kraagarm of console met een verticale belasting (die werkt als een excentrische axiaalkracht) zodat het moment M_{y1} om de x -as mee roteert met het staafeind. Omdat er dan geen rotatieverschil optreedt tussen moment en staafeind ontstaat er dus ook geen M_z .

De krachtverdeling is hierbij overeenkomstig een 'halve' staaf op twee steunpunten met gaffeloplegging, waarbij het vrije uiteinde van de uitkraging vergelijkbaar is meteen gaffel en het inklemmingspunt met het symmetrische staafmidden van een staaf op twee steunpunten. Tussen kipmoment, knikkraft en 2^{de}-orde effecten ontstaan bij een dergelijke uitkraging dan dezelfde interacties als beschreven in paragraaf 5.1.1 bij een twee maal zo lange staaf op twee steunpunten. Voor een uitkraging geldt dan als kritische knikkraft:

$$F_{Ez} = \frac{\pi^2 EI_z}{(2L)^2} \quad (5.55)$$

waarna het kritische kipmoment volgt als:

$$M_{kr} = \frac{\pi}{2L} \sqrt{EI_z GI_t} = \sqrt{F_{Ez} GI_t} \quad (5.56)$$

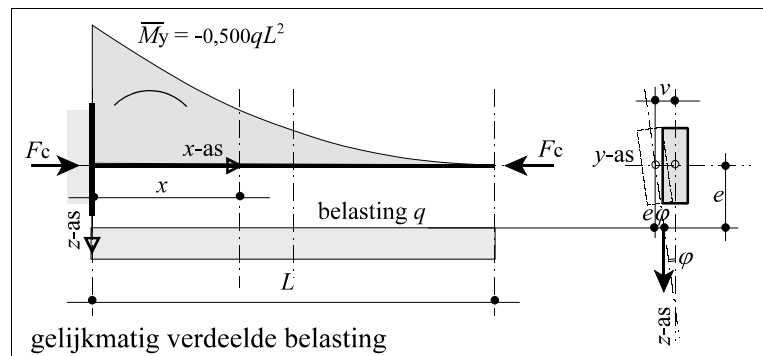
De term n_z^* kan overeenkomstig hoofdstuk 5.1.1 formule (5.14) worden berekend met:

$$\frac{1}{n_z^*} = \left(\frac{M_{y1}}{M_{kr}} \right)^2 + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (5.57)$$

De mogelijke combinaties van moment en drukkracht en n_z^* zijn af te lezen in figuur 5.3.

5.2.2 Uitkraging, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting en axiale drukkracht

Het schema van de staaf is weergegeven in figuur 5.25.



figuur 5.25

Evenals bij een staaf op twee steunpunten wordt er weer van uit gegaan dat de invloed van de vervorming in de 'sterke' richting kan worden verwaarloosd, dat een eventuele dwarsbelasting in de 'zwakke' richting geen invloed heeft op de berekening van n_z^* .

Het op te lossen stelsel vergelijkingen is te ontleen aan (5.01) en (5.22) en kan worden geschreven als:

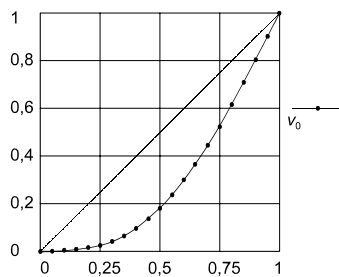
buiging om de z-as	$M_{z2} = F_c (v - \bar{v}) + M_{y1} \varphi = - EI_z v'' / n_z^*$	(5.58)
torsie om de x-as	$M_{t2}' = M_{y1} v'' - q_z e \varphi = GI_t \varphi$	

Het parabolisch verlopende moment: $M_{y1} = -0,5q_z(L-x)^2 = \bar{M}_{y1}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2$ (5.59)

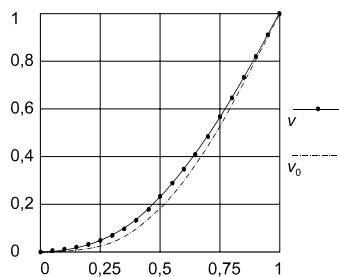
heeft bij de inklemming ($x=0$) een maximale waarde: $\bar{M}_{y1} = -0,5q_zL^2$ (5.60)

De uitwerking verloopt evenals bij de staaf op twee steunpunten weer volgens een procedure in negen stappen:

1 Vervorming:



figuur 5.26a



figuur 5.26b

Begonnen wordt met dezelfde initiële sinuslijn als bij een staaf op twee steunpunten, die nu bij: $x=0$ wordt ingeklemd en bij: $x=L$ vrij kan zweven (zie figuur 5.26a) en zodoende kan worden geformuleerd als:

$$v = k_{v1} \left(\pi x - \sin \frac{\pi x}{L} \right) \text{ of in verhouding met de 'top'waarde:}$$

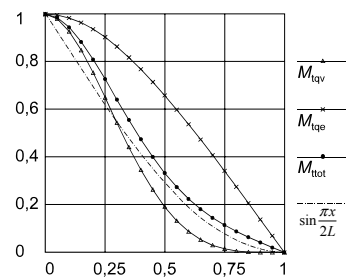
$$v_0 = \bar{v}_0 \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \quad (5.61)$$

Bij de 2^{de} en volgende iteraties wordt hierbij opgeteld een steeds nauwkeuriger wordende 2^{de}-orde uitbuiging v_2 . Vooruitlopend op het berekeningsresultaat (na 20 iteraties) wordt in figuur 5.26b alvast het eindresultaat v getoond dat volgens (5.53) kan worden benaderd als:

$$v = \bar{v} g_{1a} \left\{ (1-a) \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L} \right) + a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \right\} \quad (5.62)$$

Met de hulpfunctie g_{1a} wordt de verhouding tussen het werkelijke verloop van v en de aangenomen initiële zuivere sinuslijn in rekening gebracht. Uit figuur 5.26b (waarin ter vergelijking het verloop van v_0 en v in dezelfde grafiek zijn getekend is af te leiden dat de waarde van deze verhouding nergens ver afwijkt van de waarde 1. Dit blijkt overigens sterk afhankelijk te zijn van de grootte van de axiale drukkracht. Bij toenemende waarde van F_c gaat het eindresultaat hoe langer hoe meer een cosinuslijn benaderen zoals bij figuur 5.21 en formule (5.53) is besproken.

2 Torsiemoment:



figuur 5.27

Afhankelijk van het 'teken' van e wordt M_{tqe} opgeteld bij of afgetrokken van M_{tqv}

Wordt berekend door integreren van M_t' (zie hiervoor):

$$M_{t2} = \int_{0,5L}^x (M_{y1} v'' + q_z e \varphi) dx \quad (5.63)$$

Gestart wordt met: $v'' = v_0''$ en $\varphi =$ voorlopig 0.

Bij volgende iteraties worden de waarden van $v'' = v_0'' + v_0''$ en φ steeds nauwkeuriger totdat ze tenslotte niet meer veranderen en de eindsituatie is bereikt.

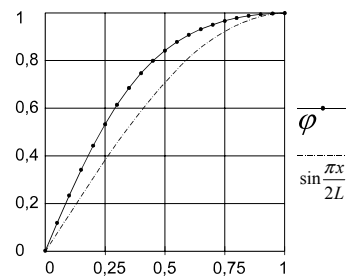
Het maximale torsiemoment bij de inklemming is:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{t2} &= \bar{M}_{tqv} + \bar{M}_{tqe} = q \left(\int_0^L v dx - e \int_0^L \varphi dx \right) \\ &= \frac{-2\bar{M}_{y1}}{L} (0,30 g_{1b} \bar{v} - 0,74 g_{2b} e \bar{\varphi}) \end{aligned} \quad (5.64)$$

In figuur 5.27 zijn beide componenten van M_t afzonderlijk weergegeven. Het verloop van M_{tqv} lijkt het meest op een sinuslijn en M_{tqe} (waarvan de waarde veel kleiner is) op een cosinuslijn. Het totale torsiemoment kan echter toch redelijk worden benaderd als een sinuslijn zodat is te schrijven:

$$M_{t2} = \frac{-2\bar{M}_{y1}}{L} (g_{1c} \bar{v} - g_{2c} e \bar{\varphi}) \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (5.65)$$

3 Rotatie:



figuur 5.28

Uit de som van de opeenvolgende torsies:

$$\varphi' = \frac{M_{t2}}{GI_t} \text{ volgt: } \varphi = \int_0^x \varphi' dx \text{ dus:}$$

$$\varphi = \frac{-2\bar{M}_{y1}}{GI_t} (g_{1d} \bar{v} - g_{2d} e \bar{\varphi}) \left\{ \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{2L} - 1 \right) \right\} \quad (5.66)$$

Dit is gelijkvormig met de in (5.53) aangenomen rotatie:

$$\varphi = \frac{\bar{\varphi}}{(\pi - 2)} \left\{ \frac{\pi x}{L} - 2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \right\}$$

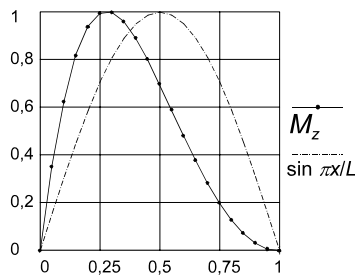
De 'top'waarde $\bar{\varphi}$ geldt bij: $x/L = 1$ waaruit volgt:

$$\bar{\varphi} = \frac{-2\bar{M}_{y1}}{GI_t} (g_{1d} \bar{v} - g_{2d} e \bar{\varphi}) \{0,363\} \text{ of:}$$

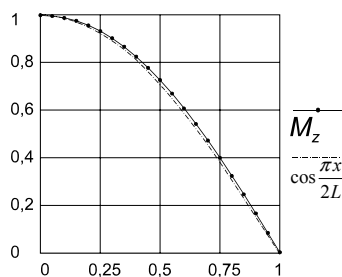
$$\bar{\varphi} = \frac{-0,73\bar{M}_{y1} g_{1d}}{GI_t - 0,73\bar{M}_{y1} g_{2d} e} \bar{v} \quad (5.67)$$

Volgens figuur 5.28 is de rotatie redelijk is te benaderen met:

$$\varphi = \frac{-0,73\bar{M}_{y1} g_{1e}}{GI_t - 0,73\bar{M}_{y1} g_{2d} e} \bar{v} \sin \frac{\pi x}{2L} \quad (5.68)$$

4 2^{de}-orde moment:

figuur 5.29a



figuur 5.29b

$$M_{z2} = M_{y1}\varphi + F_c(v - \bar{v})$$

Omdat de axiale drukkracht tot een duidelijk ander verloop van v leidt (zoals bij figuur 5.21 en formule (5.53) is besproken) wordt M_{z2} nu gesplitst in twee componenten:

$$M_{z2} = \frac{-0,73\bar{M}_{y1}^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 g_{1e}}{GI_t - 0,731\bar{M}_{y1}g_{2d}e} \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} + \quad (5.69)$$

$$- F_c \bar{v} \cos \frac{\pi x}{2L}$$

Dit is te schrijven met een nieuwe verhoudingsfunctie g_{1f} als:

$$M_{z2} = \frac{-\bar{M}_{y1}^2 g_{1f}}{GI_t - 0,731\bar{M}_{y1}g_{2d}e} \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} + \quad (5.70)$$

$$- F_c \bar{v} \cos \frac{\pi x}{2L}$$

Vergelijking van de figuren 5.29a en 5.29b laat zien dat er nu wel aanzienlijke verschillen zijn tussen de M_z -lijn door de q -last en een zuivere sinuslijn, terwijl de M_z -lijn door de axiale kracht exact de cosinuslijn volgt.

Door de iteraties in de spreadsheet wordt met de juiste waarden rekening gehouden.

5 Kromming om de z-as:

$$v_2'' = -\frac{M_{z2}}{EI_z} \quad (5.71)$$

6 Uitbuiging 2^{de}-orde:

$$v_2 = \int_0^x \int_0^x v_2'' dx dx = - \int_0^x \int_0^x \frac{M_z}{EI_z} dx dx =$$

$$= \frac{\bar{M}_{y1}^2 g_{1f}}{GI_t - 0,731\bar{M}_{y1}g_{2d}e} \bar{v} \frac{L^2}{\pi^2 EI_z} \left(\frac{\pi x}{L} - \sin \frac{\pi x}{L} \right) + \quad (5.72)$$

$$+ F_c \bar{v} \frac{4L^2}{\pi^2 EI_z} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right)$$

7 Nieuwe uitbuiging:

$$v_{nw} = v_0 + v_2$$

Het uitgangspunt hiervoor was: volgens (5.53):

$$v = \bar{v} \left\{ (1-a) \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L} \right) + a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \right\} \quad \text{zie (5.62)}$$

8 Gelijkvormigheid:	<p>Ondanks de geconstateerde verschillen tussen de M_z-lijnen en zuivere sinus- respectievelijk cosinuslijnen blijkt er toch (na tweemaal integreren) een 2^{de}-orde uitbuigingslijn (5.72) te ontstaan die voldoende gelijkvormig is met het uitgangspunt (5.62) mits:</p> $\frac{1-a}{\bar{v}} = \frac{1}{\bar{v}_2} \frac{g_{1f} \bar{M}_{y1}^2}{GI_t - 0,73g_{2d} \bar{M}_{y1} e} \frac{L^2}{\pi^2 EI_z} \pi \quad \text{en:} \quad (5.73)$ $\frac{a}{\bar{v}} = \frac{1}{\bar{v}_2} F_c \frac{4L^2}{\pi^2 EI_z}$ <p>Met: $F_{Ez} = \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2}$ leidt dit tot:</p> $\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} \frac{F_c}{F_{Ez}} = \frac{0,25\pi g_{1f} \bar{M}_{y1}^2}{GI_t - 0,73g_{2d} \bar{M}_{y1} e} \frac{1}{F_{Ez}} \quad (5.74)$
9 Term n_z^* :	<p>Analoog aan de gevallen met staven op twee steunpunten ontstaat hier een geheel vergelijkbare formule:</p> $\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{0,25\pi g_{1g} \bar{M}_{y1}^2}{F_{Ez} GI_t - 0,73g_{2d} \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (5.75)$ <p>De waarden van de twee overblijvende verhoudingsfuncties blijken enigszins afhankelijk van de grootte van M_y, e en F_c maar zijn beide toch nagenoeg constant. Daarom kan de formule voor n_z^* worden geschreven als:</p> $\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 - k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (5.76)$

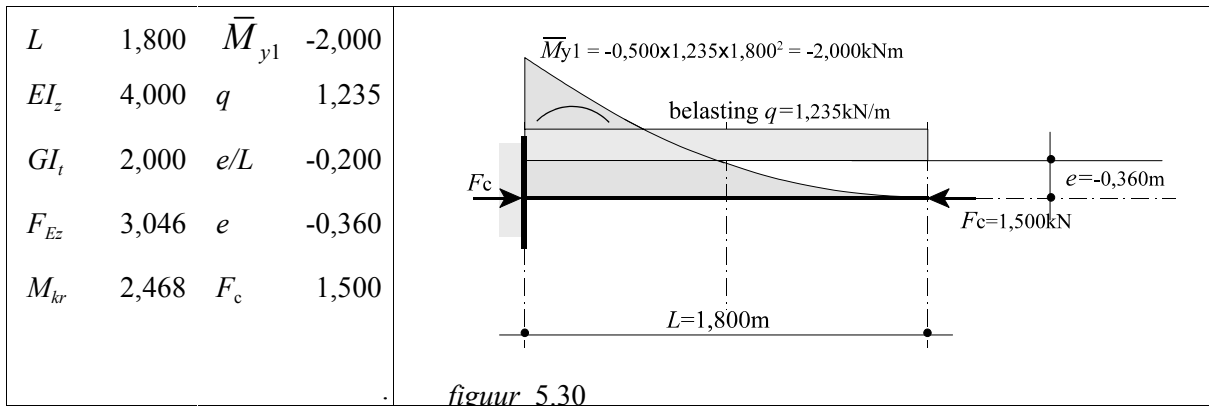
In Bijlage 5.2.2 wordt afgeleid dat de waarden van de in te voeren factoren zijn:

$$\boxed{k_1 = 0,24} \quad \text{en} \quad \boxed{k_2 = 0,65} \quad (5.77)$$

N.B. Volgens de in hoofdstuk 3.2 (figuur 3.3) gehanteerde tekenafspraken geldt hier: M_{y1} is negatief. De term: $-k_2 \bar{M}_{y1}$ is dus positief. Verwarring is nu te voorkomen door voor \bar{M}_{y1} de absolute waarde in te vullen zodat het gunstige effect van een positieve excentriciteit (als een vergroting van de stabiliteit) automatisch wordt verdisconteerd. De factor n_z^* kan worden berekend met:

$$\boxed{\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,24 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,65 |\bar{M}_{y1}| e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}}} \quad (5.78)$$

Als toepassingsvoorbeeld volgt een staaf met willekeurige eigenschappen en belastingen:



uitwerking:

De resultaten van de spreadsheet zijn opgenomen in bijlage 5.2.2.

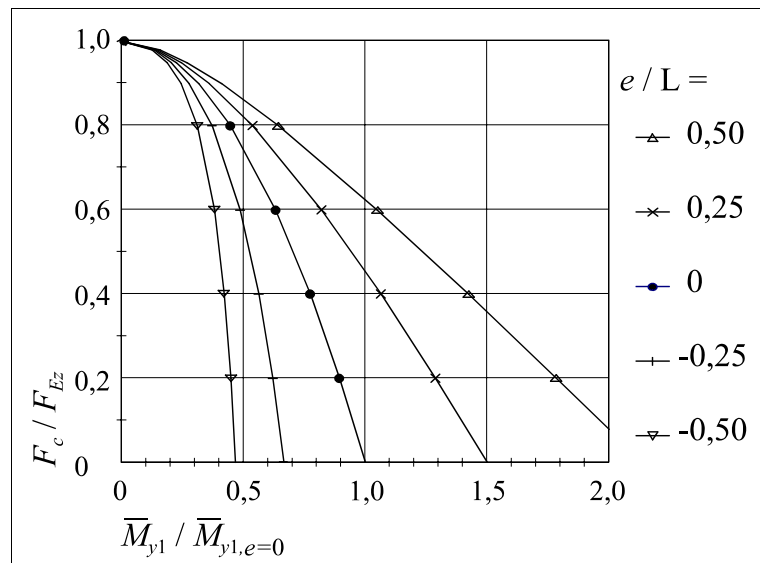
Aan de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is nu te ontleen: $\frac{1}{n_z^*} = \frac{1,252}{2,252} = 1,80$

Met de ontwikkelde formule wordt dit:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,24 \cdot 2,00)^2}{2,468^2 + 0,65 \cdot |2,00| \cdot 0,360 \cdot 3,046} + \frac{1,500}{3,046} = \frac{0,230}{6,091 - 1,426} + 0,492 = 0,049 + 0,492 = 0,542 = \frac{1}{1,85}$$

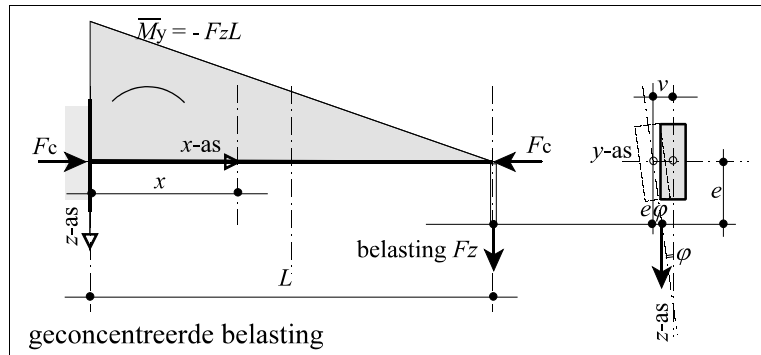
Het verschil tussen 1,85 en 1,80 is 2,6 %.

Vergelijkbaar met figuur 5.12 (voor een staaf op twee steunpunten) worden de invloeden van een axiale drukkracht en de excentriciteit op de eigenwaarde van het moment weergegeven in de grafiek van figuur 5.31:



5.2.3 Uitkraging, belast door een geconcentreerd belasting op het staafend en een axiale drukkracht

Van toepassing zijn dezelfde uitgangspunten als bij een gelijkmatig verdeelde belasting. Het schema van de staaf is weergegeven in figuur 5.32:



figuur 5.32

Het op te lossen stelsel vergelijkingen is onveranderd:

buiging om de z-as	$M_{z2} = F_c (v - \bar{v}) + M_{y1} \phi = -EI_z v'' / n_z^*$	zie (5.54)
torsie om de x-as	$M_{t2} = M_{y1} v' + M_{x2} = GI_t \phi'$	

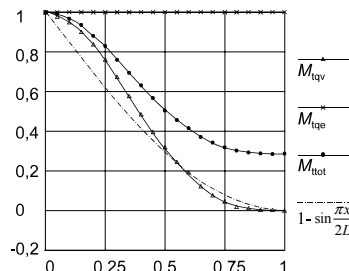
Het lineair verloopende moment: $M_{y1} = -F_z (L - x) = \bar{M}_{y1} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$ (5.79)

heeft bij de inklemming: $x = 0$, een maximale waarde: $\bar{M}_{y1} = -F_z L$ (5.80)

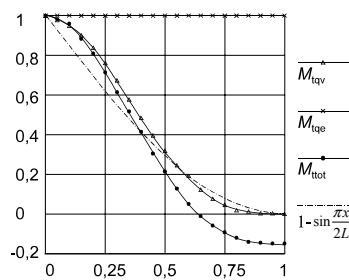
De uitwerking verloopt evenals bij de staaf op twee steunpunten in de volgende negen stappen die nagenoeg gelijk verlopen als bij het geval met gelijkmatig verdeelde belasting en daarom hier beknopter worden besproken:

<p>1 Vervorming:</p> <p>figuur 5.33</p>	<p>Begonnen wordt met dezelfde initiële sinuslijn als bij de gelijkmatig verdeelde belasting:</p> $v_0 = \bar{v}_0 \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L} \right)$ <p style="text-align: right;">zie (5.61)</p> <p>Vooruitlopend op het berekeningsresultaat (na 20 iteraties) wordt in figuur 5.33 alvast het eindresultaat v getoond:</p> $v = \bar{v} \left\{ (1-a) \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L} \right) + a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \right\}$ <p style="text-align: right;">zie (5.62)</p>
---	--

2 Torsiemoment:



figuur 5.34a $e/L = -0,5$



figuur 5.34b $e/L = +0,5$

Wordt berekend door integreren van M_t' (zie hiervoor), maar de component waarin de excentriciteit van de belasting is verwerkt heeft is over het gehele staafverloop constant zodat:

$$M_{t2} = \int_{0,5L}^x M_{y1} v'' dx + F_z e \bar{\varphi} \quad \text{zie (5.63)}$$

Het maximale torsiemoment bij de inklemming is:

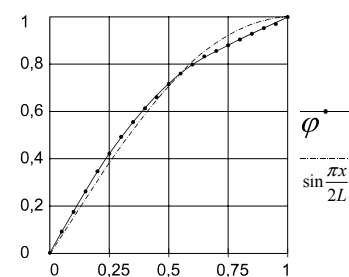
$$\bar{M}_{t2} = \bar{M}_{tqv} + \bar{M}_{tqe} = F_z (\bar{v} - e \bar{\varphi}) = \frac{-\bar{M}_{y1}}{L} (\bar{v} - e \bar{\varphi}) \quad (5.81)$$

In de figuren 5.34a respectievelijk 5.34b is het torsiemoment weergegeven bij een vrij grote negatieve respectievelijk positieve excentriciteit.

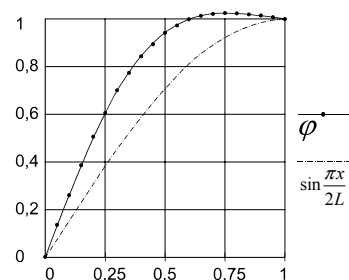
Het totale torsiemoment is redelijk te benaderen als (een door de hulpfuncties gecorrigeerde) sinuslijn, zodat kan worden geschreven:

$$M_{t2} = \frac{-\bar{M}_{y1}}{L} (g_{1c} \bar{v} - g_{2c} e \bar{\varphi}) \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (5.82)$$

3 Rotatie:



figuur 5.35a $e/L = -0,5$



figuur 5.35b $e/L = +0,5$

Uit de som van de opeenvolgende torsies:

$$\varphi' = \frac{M_{t2}}{GI_t} \quad \text{volgt:} \quad \varphi = \int_0^x \varphi' dx \quad \text{dus:}$$

$$\varphi = \frac{-\bar{M}_{y1}}{GI_t} (g_{1d} \bar{v} - g_{2d} e \bar{\varphi}) \left\{ \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{2L} - 1 \right) \right\} \quad (5.83)$$

Dit is gelijkvormig met de in (5.53) aangenomen rotatie:

$$\varphi = \frac{\bar{\varphi}}{(\pi - 2)} \left\{ \frac{\pi x}{L} - 2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \right\}$$

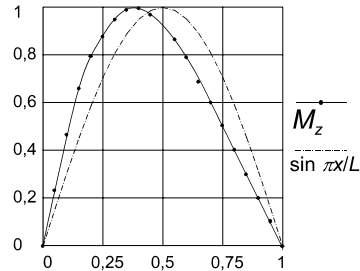
De 'top'waarde $\bar{\varphi}$ geldt bij: $x/L = 1$ waaruit volgt:

$$\bar{\varphi} = \frac{-\bar{M}_{y1}}{GI_t} (g_{1d} \bar{v} - g_{2d} e \bar{\varphi}) \{0,363\} \quad \text{of:}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{-0,36 \bar{M}_{y1} g_{1d}}{GI_t - 0,36 \bar{M}_{y1} g_{2d} e} \bar{v} \quad (5.84)$$

Hoewel (bij $e > 0$) de afwijking met de sinuslijn vrij groot is kan, maar de berekening in de spreadsheet zeer nauwkeurig is, is de rotatie desondanks te benaderen als:

$$\varphi = \frac{-0,36 \bar{M}_{y1} g_{1e}}{GI_t - 0,36 \bar{M}_{y1} g_{2d} e} \bar{v} \sin \frac{\pi x}{2L} \quad (5.85)$$

<p>4 2^{de}-orde moment:</p>  <p>figuur 5.36</p>	$M_{z2} = M_{y1}\varphi + F_c(v - \bar{v})$ <p>Op dezelfde wijze als bij het geval met gelijkmatig verdeelde belasting is het torsiemoment weer te splitsen in twee componenten:</p> $M_{z2} = \frac{-\bar{M}_{y1}^2 g_{1f}}{GI_t - 0,36\bar{M}_{y1}g_{2d}e} \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} - F_c \bar{v} \cos \frac{\pi x}{2L} \quad (5.86)$ <p>Het deel beïnvloed door M_{y1} is getekend in figuur 5.36. Het deel beïnvloed door F_c is identiek aan het geval met gelijkmatig verdeelde belasting, figuur 5.29.</p>
<p>5 Kromming om de z-as:</p>	$v_2'' = -\frac{M_{z2}}{EI_z} \quad \text{zie (5.71)}$
<p>6 Uitbuiging 2^{de}-orde:</p>	$v_2 = \int_0^x \int_0^x v_2'' dx dx = -\int_0^x \int_0^x \frac{M_{z2}}{EI_z} dx dx =$ $= \frac{\bar{M}_{y1}^2 g_{1f}}{GI_t - 0,36\bar{M}_{y1}g_{2d}e} \bar{v} \frac{L^2}{\pi^2 EI_z} \left(\frac{\pi x}{L} - \sin \frac{\pi x}{L} \right) +$ $+ F_c \bar{v} \frac{4L^2}{\pi^2 EI_z} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (5.87)$
<p>7 Nieuwe uitbuiging:</p>	$v_{\text{nw}} = v_0 + v_2$ <p>Het uitgangspunt hiervoor was: volgens (5.53):</p> $v = \bar{v} \left\{ (1-a) \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L} \right) + a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \right\} \quad \text{zie (5.62)}$
<p>8 Gelijkvormigheid:</p>	<p>Op dezelfde wijze als bij het geval met gelijkmatig verdeelde belasting, zie (5.73) en (5.74), zijn de twee componenten van de uitbuigingslijn te berekenen, met als resultaat:</p> $\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} - \frac{F_c}{F_{Ez}} = \frac{0,25\pi g_{1f} \bar{M}_{y1}^2}{GI_t - 0,36g_{2d} \bar{M}_{y1} e} \frac{1}{F_{Ez}} \quad (5.88)$
<p>9 Term n_z^*:</p>	<p>Analoog aan alle vorige gevallen ontstaat ook hier een geheel vergelijkbare formule die kan worden geschreven als:</p> $\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 - k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad \text{zie (5.76)}$

In Bijlage 5.2.2 wordt afgeleid dat de waarden van de in te voeren factoren zijn:

$$\boxed{k_1 = 0,41} \text{ en } \boxed{k_2 = 0,57} \quad (5.90)$$

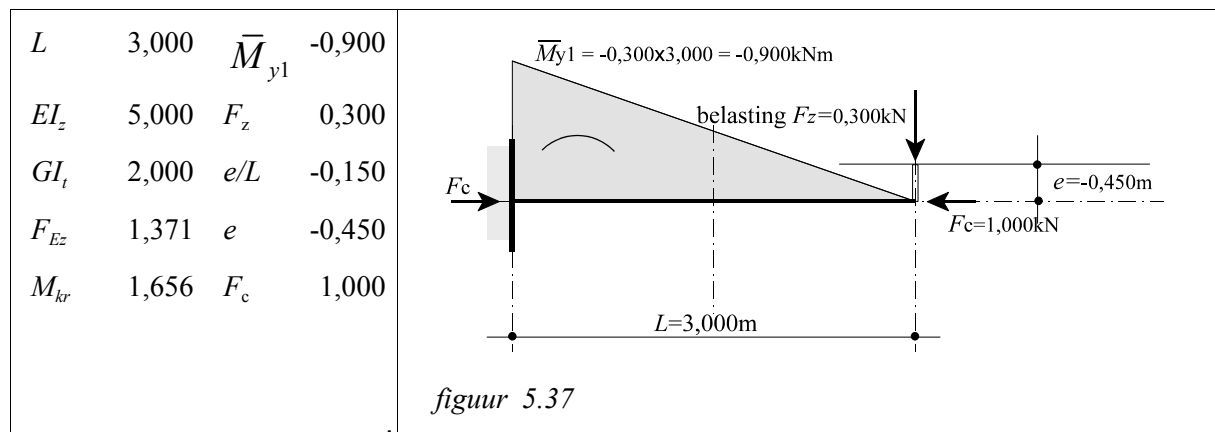
zodat voor een geconcentreerde belasting op het staafeind de term n_z^* kan worden berekend met:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,41\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,57|\bar{M}_{y1}|eF_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (5.91)$$

N.B. 1. Let weer op het teken van de term betreffende de excentriciteit in de noemer.
Deze gehele term is positief bij positieve = gunstige excentriciteit en omgekeerd.

2. In de figuren 5.34b valt op dat bij een positieve excentriciteit de maximale rotatie niet bij het staafeind maar veel dichterbij het midden van de staaf optreedt. Deze plaats correspondeert met het nul-punt in de Mt -lijn (zie figuur 5.33b) die gelijkvormig is met de torsie (= de eerste afgeleide van de rotatie).

Als toepassingsvoorbeeld volgt een staaf met willekeurige eigenschappen en belastingen:



uitwerking:

De resultaten van de spreadsheet zijn opgenomen in bijlage 5.2.2.

Aan de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is nu te ontleen: $n_z^* = \frac{4,530}{3,530} = 1,28$

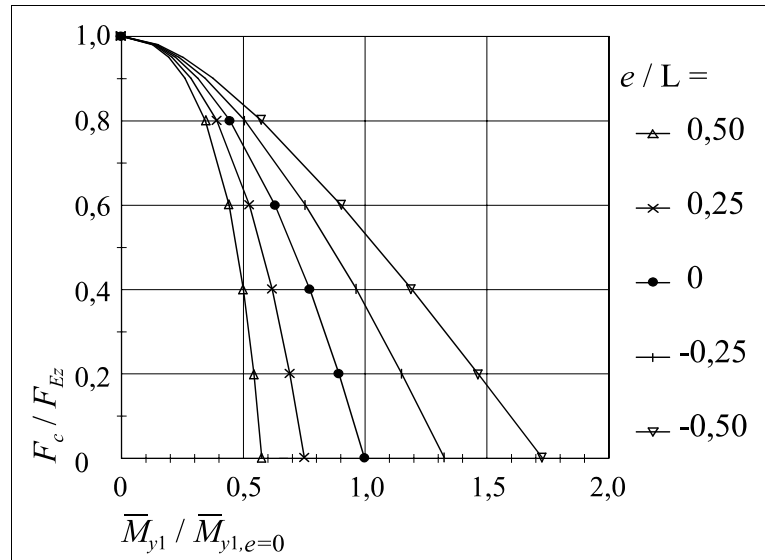
Met de ontwikkelde formule wordt dit:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,41 \cdot 0,90)^2}{1,656^2 - 0,57 \cdot |0,90| \cdot 0,450 \cdot 1,371} + \frac{1,00}{1,371} = \frac{0,136}{2,742 - 0,316} + 0,73 =$$

$$= 0,056 + 0,729 = 0,86 = \frac{1}{1,27}$$

Het verschil 1,28 en 1,27 is ca. 1 %

Vergelijkbaar met figuur 5.10 voor een staaf op twee steunpunten worden de invloeden van een axiale drukkracht en de excentriciteit op de eigenwaarde van het moment weergegeven in de grafiek van figuur 5.38:



figuur 5.38

5.3 Staaf, belast door een willekeurige belastingcombinatie

Combinaties van verschillende typen belasting, zoals inklemmingsmomenten met een gelijkmatig verdeelde belasting en/of een of meer puntlasten, kunnen eenvoudig in rekening worden gebracht door ze te vervangen en de algemene formule voor n_z^* aan te passen. Uitgegaan kan worden van de algemene formule voor n_z^* :

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (5.92)$$

Bij meerdere belastingen kan worden gesuperponeerd:

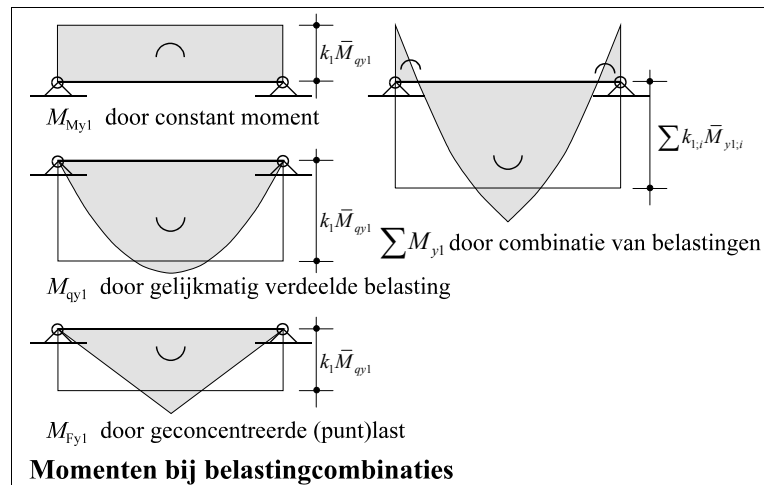
in de teller:

$$k_1 \bar{M}_{y1} = \sum k_{1,i} \bar{M}_{y1,i} = k_{1;\text{geval1}} \bar{M}_{y1;\text{geval1}} + k_{1;\text{geval2}} \bar{M}_{y1;\text{geval2}} + \dots \quad (5.93)$$

en in de noemer:

$$k_2 \bar{M}_{y1} e = k_{2;\text{geval1}} \bar{M}_{y1;\text{geval1}} e_{\text{geval1}} + k_{2;\text{geval2}} \bar{M}_{y1;\text{geval2}} e_{\text{geval2}} + \dots \quad (5.93)$$

Alle termen in te vullen met het juiste teken. Negatieve steunpuntsmomenten hebben (bij overwegend positieve veldmomenten) een gunstig effect op de stabiliteit en worden dus afgetrokken. Zie figuur 5.39:



figuur 5.39

De waarden van k_1 en k_2 voor andere dan de hiervoor beschouwde belastinggevallen kunnen worden ontleend aan de literatuur, bijvoorbeeld NEN 6760 [42b] of NEN 6771 [42d]. De daarin opgenomen coëfficiënten (ρ respectievelijk C_1 genoemd) stemmen goed overeen met de (reciproque) waarden van k_1 . Voor de waarden van k_2 zijn enige verschillen geconstateerd. Zie Hoofdstuk 9.

Om bij (nagenoeg) even grote veld- en steunpuntsmomenten te voorkomen dat er te weinig of niets overblijft en/of bij steunpuntsmomenten met tegengestelde tekens, geven de genoemde normen soms een ondergrens voor de momentreductie.

Voor de term $k_2 \bar{M}_{y1} e$ is het echter niet nodig een ondergrens in rekening te brengen omdat een negatieve en een positieve excentriciteit elkaar kunnen opheffen. Overigens zal dit zelden voorkomen omdat deze term niet wordt beïnvloed door steunpuntsmomenten (waarvan altijd geldt: $e=0$).

Speciaal moet worden gelet op de tekens van deze term bij uitkragingen.

Zie de opmerkingen bij (5.77) en (5.91), waarbij is te bedenken dat een positief teken (in de richting van de belasting) altijd de kipstabiliteit vergroot en omgekeerd, ongeacht het buigteken bij het moment.

Hiermee is de 2^{de}-orde term n_z^* voor de meeste praktisch voorkomende belastinggevallen vrij eenvoudig in rekening te brengen. Het toetsen van de stabiliteit, de sterkte en de stijfheid wordt behandeld in Hoofdstuk 8.

Hoofdstuk

6

Analytische methode met differentiaalvergelijkingen en vormveranderingsarbeid

Ter vergelijking met de iteratiemethode in Hoofdstuk 5 is een analytische methode ontwikkeld die eveneens is gebaseerd op de uitgangspunten volgens Hoofdstuk 3 en de in Hoofdstuk 4 afgeleide differentiaalvergelijkingen:

buiging om de y -as	$+ EI_y w_2'' + F_c w$	$= 0$	zie (4.09)
buiging om de z -as	$+ EI_z v_2'' + F_c v$	$+ M_{y1} \phi = 0$	
rotatie om de x -as	$+ M_{y1} v' + M_{x2}$	$- GI_t \phi = 0$	

De twee laatste vergelijkingen hierin zijn in het algemeen op te lossen onafhankelijk van de eerste (zie ook figuur 4.7) zodat als basis voor verdere uitwerking overblijft:

buiging om de z -as	$+ EI_z v_2'' + F_c v$	$+ M_{y1} \phi = 0$	(6.01)
rotatie om de x -as	$+ M_{y1} v' + M_{x2}$	$- GI_t \phi = 0$	

Als v_2 en v (nagenoeg) gelijkvormig zijn is aan te nemen dat dit ook geldt voor v_2'' en v'' .

Dus: $\frac{v_2''}{v''} = \frac{v_2}{v} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{1}{n_z^*}$ (en overeenkomstig voor w_2'' en w'') waaruit volgt:

$$v_2'' = \frac{v''}{n_z^*} \quad \text{en:} \quad w_2'' = \frac{w''}{n_y^*} \quad (6.02a) \text{ en } (6.02b)$$

Alleen voor enkele zeer bijzondere belastinggevallen is hiervoor een eenvoudige analytische oplossing te vinden met sinus- en cosinusfuncties, waarbij zowel door integreren als differentiëren dezelfde functies verkregen worden.

Wanneer een wiskundig-analytische methode niet mogelijk is kan een oplossing worden gezocht door een andere werkwijze te kiezen.

In Hoofdstuk 5 is dat gedaan met behulp van een iteratiemethode in een stappenplan. In het nu volgende Hoofdstuk 6 wordt gebruik gemaakt van het beproefde principe van de virtuele vormveranderingsarbeid. Deze analytische methode wordt gecombineerd met een numerieke berekening van de nodige onderdelen.

Uitwerking met behulp van vormveranderingsarbeid

Nadat vervorming en samenhang van de staafonderdelen met kinematische- en constitutieve vergelijkingen zijn vastgelegd, leent deze goede (en nauwkeurige) methode zich uitstekend om tenslotte het evenwicht te berekenen. Daarbij is het niet nodig de exacte vergelijking te zoeken van de echte vervormingslijnen omdat plaatselijke afwijkingen (te veel / te weinig) bij zo goed mogelijk geschatte vervormingslijnen voldoende gecompenseerd worden.

De methode met vormveranderingsarbeid en/of virtuele arbeid is eerder voor de oplossing van stabiliteitsproblemen toegepast door Vandepitte [11] en Trahair [23].

Onderscheid wordt gemaakt tussen:

$A_u =$	som van uitwendige belastingen \times verplaatsingen + momenten \times rotaties .. [Nm]
$A_i =$	som van de inwendige spanningen \times oppervlak \times inwendige verplaatsingen .. [Nm]

Uit de wet van behoud van energie volgt: $A_u - A_i = 0$ (6.03)

Bij de hier behandelde stabiliteitsgevallen wordt de invloed van de uitwendige belastingen eerst omgerekend naar de hierdoor veroorzaakte momenten, zodat uitsluitend kan worden gerekend met de arbeid door momenten \times rotaties, waarin:

bij buiging: rotatie $= dv' = -v'' dx =$ kromming \times lengte-eenheid
 bij torsie : rotatie $= d\phi = \phi' dx =$ torsie \times lengte-eenheid

Uit de relaties tussen momenten en vervormingen: $M_z = -EI_z v_2''$ en: $M_t = GI_t \phi'$ kan nu de totale vormveranderingsarbeid worden berekend met:

	Arbeid uitwendig:	- Arbeid inwendig:	= 0
buiging:	$0,5 \int_0^L M_z (-v_2'') dx$	$- 0,5 \int_0^L EI_z (v_2'')^2 dx$	= 0 (6.04)
torsie:	$0,5 \int_0^L M_t \phi' dx$	$- 0,5 \int_0^L GI_t (\phi')^2 dx$	

N.B. De factor 0,5 is het gevolg van het geleidelijk toenemen van de momenten en de bijbehorende krommingen v'' en v_2'' respectievelijk torsies ϕ' en daardoor van uitbuigingen v en v_2 respectievelijk rotaties ϕ .

De vormveranderingsarbeid van alle van invloed zijnde componenten wordt nu berekend in een spreadsheet, waarna de relaties tussen belastingen, vormveranderingen en de daaruit volgende 2^{de}-orde effecten definitief kunnen worden vastgesteld.

6.1 Staaf op twee steunpunten

6.1.1 Belast door een constant moment en een axiale drukkracht

Alle doorsneden van de staaf worden belast door dezelfde 1^{ste}-orde belasting: een axiale drukkracht F_c en een overall constant moment M_y (dat wordt veroorzaakt door twee gelijke en tegengestelde momenten aan de beide staafeinden). Dit is het enige bekende belastinggeval waarvoor een wiskundig-analytische oplossing mogelijk is.

Als: $M_{y1} = \bar{M}_{y1} = \text{constant}$ en er geen dwarsbelasting is, dus: $M_{x2} = 0$ kunnen de gekoppelde vergelijkingen (6.1), in overeenstemming met de randvoorwaarden, eenvoudig en nauwkeurig worden opgelost met een sinusvormig verloop van de vervormingen:

$$\frac{w}{\bar{w}} = \frac{v}{\bar{v}} = \frac{\varphi}{\bar{\varphi}} = \sin \frac{\pi x}{L} \quad (6.05)$$

met als afgeleiden:

$$\frac{w'}{\bar{w}} = \frac{v'}{\bar{v}} = \frac{\varphi'}{\bar{\varphi}} = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \quad \text{en:} \quad \frac{w''}{\bar{w}} = \frac{v''}{\bar{v}} = \frac{\varphi''}{\bar{\varphi}} = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}.$$

N.B. Dit belastinggeval kan dus direct wiskundig-analytisch worden opgelost, zodat hier geen arbeidsmethode nodig is.

Bovendien wordt de eerste vergelijking van (4.09) ook in de oplossing betrokken.

De drie gekoppelde vergelijkingen volgens (4.09) kunnen dan worden geschreven als:

$$\left(\begin{array}{l} \left(-\frac{\pi^2 EI_y}{L^2 n_y^*} + F_c \right) \bar{w} \sin \frac{\pi x}{L} \\ \left(-\frac{\pi^2 EI_z}{L^2 n_z^*} + F_c \right) \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L} + M_{y1} \bar{\varphi} \sin \frac{\pi x}{L} \\ M_{y1} \frac{\pi}{L} \bar{v} \cos \frac{\pi x}{L} + M_{x2} \quad -GI_t \frac{\pi}{L} \bar{\varphi} \cos \frac{\pi x}{L} \end{array} \right) = 0 \quad (6.06)$$

Dit is alleen eenvoudig op te lossen als al deze termen gelijkvormig zijn te maken, wat mogelijk is omdat: $M_{y1} = \text{constant} = \bar{M}_{y1}$ en: $M_{x2} = 0$.

Een oplossing wordt gevonden door de torsievergelijking één maal te differentieren:

$$-\bar{M}_{y1} \frac{\pi^2}{L^2} \bar{v}_x \sin \frac{\pi x}{L} + GI_t \frac{\pi^2}{L^2} \bar{\varphi} \sin \frac{\pi x}{L} = 0 \quad \text{en te delen door: } \frac{\pi^2}{L^2}, \text{ wat leidt tot:}$$

$$-\bar{M}_{y1}\bar{v}_x \sin \frac{\pi x}{L} + GI_t \bar{\varphi} \sin \frac{\pi x}{L} = 0 \quad (6.07)$$

N.B. In de literatuur komt het vaak voor dat bovendien de beide buigvergelijkingen tweemaal worden gedifferentieerd, maar voor het verkrijgen van algehele gelijkvormigheid is dat voor dit eenvoudige belastinggeval overbodig.

Na invoeren van: $\frac{\pi^2 EI_y}{L^2} = F_{Ey}$ en $\frac{1}{n_y^*} = \frac{\bar{w}_2}{\bar{w}}$ respectievelijk: $\frac{\pi^2 EI_z}{L^2} = F_{Ez}$ en $\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}}$

en delen door: $\sin \frac{\pi x}{L}$ zijn de drie vergelijkingen in matrixnotatie te schrijven als:

$$\begin{bmatrix} +\frac{F_{Ey}}{n_y^*} - F_c & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{F_{Ez}}{n_z^*} - F_c & -\bar{M}_{y1} \\ 0 & -\bar{M}_{y1} & +GI_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{v} \\ \bar{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.08)$$

Drie lineaire vergelijkingen met drie onbekenden: \bar{w} , \bar{v} en $\bar{\varphi}$, waarvan de rechterleden nul zijn, hebben als oplossing: $\bar{w} = \bar{v} = \bar{\varphi} = 0$. Er is slechts één mogelijkheid waarbij \bar{w} , \bar{v} en $\bar{\varphi}$ ongelijk aan nul zijn. Dan moeten de vergelijkingen onderling afhankelijk zijn met als criterium dat de determinant van de stijfheidsmatrix nul is. Dit betekent:

$$\left(\frac{F_{Ey}}{n_y^*} - F_c \right) \left\{ \left(\frac{F_{Ez}}{n_z^*} - F_c \right) GI_t - \bar{M}_{y1}^2 \right\} = 0 \quad (6.09)$$

Het product van deze twee termen is alleen nul als:

- òf de eerste term = 0 waaruit volgt: $n_y^* = \frac{F_{Ey}}{F_c}$ (6.10)

waarmee desgewenst de 2^{de}-orde vervorming in de 'sterke' richting kan worden berekend met:

$$\bar{w} = (\bar{w}_0 + \bar{w}_1) \frac{n_y^*}{n_y^* - 1} \quad (6.11)$$

Dit wordt ook algemeen toegepast in de gebruikelijke stabiliteitsberekeningen waar uitbuiging in slechts één richting wordt beschouwd. Zie voor een nadere beschouwing bijlage B2.

$$\text{- en/òf de tweede term} = 0 \quad \text{waaruit volgt: } \bar{M}_{y1}^2 = \left(\frac{F_{Ez}}{n_z^*} - F_c \right) GI_t \quad (6.12)$$

waaraan de 2^{de}-orde vervorming in de 'zwakke' richting kan worden ontleend.

Voor de betekenis van de term: $n_z^* = \frac{\bar{v}}{\bar{v}_2}$ is in het vervolg zeer belangrijk, want hiermee

wordt de basis gelegd om de 2^{de}-orde vervorming bij de combinatie van knik in de 'zwakke' as en kip te kunnen bepalen.

$$\text{Een waarde: } n_z^* = 1 \quad \text{betekent hier theoretisch: } \bar{v} = \bar{v}_0 \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} = \frac{\bar{v}_0}{0} = \text{oneindig}$$

$$\text{en bij een eventuele 1^{ste}-orde uitbuiging ook: } \bar{v} = (\bar{v}_0 + \bar{v}_1) \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} = \frac{\bar{v}_0 + \bar{v}_1}{0} = \text{oneindig,}$$

waarmee de grens van instabiliteit wordt overschreden, als de staaf al niet eerder is bezwiken door de zeer grote buigspanningen die met de optredende grote vervormingen samenhangen.

Wanneer deze grens wordt bereikt is de 2^{de}-orde uitbuiging inmiddels (nagenoeg) gelijkvormig aan de totale uitbuiging en zijn de vorm (en meestal ook de grootte) van de initiële uitbuiging en de 1^{ste}-orde uitbuiging verwaarloosbaar ten opzichte van de einduitbuiging.

De combinatie van een axiale drukkracht F_c en een buigend moment \bar{M}_{y1} kan, door te delen door $F_{Ez} GI_t = M_{kr}^2$, verder worden uitgewerkt tot:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{M}_{y1}^2}{M_{kr}^2} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (6.13)$$

Dit stemt geheel overeen met de oplossing volgens het 'stappenplan'. Zie formule (5.14) en de verschillende combinatiemogelijkheden van \bar{M}_{y1} en F_c in figuur 5.3.

Hier kan nog extra vermeld worden dat de verhouding tussen \bar{v} en $\bar{\varphi}$ desgewenst is af te leiden uit de 2^{de} en de 3^{de} vergelijking van (6.07):

$$\begin{bmatrix} +\frac{F_{Ez}}{n_z^*} - F_c & -\bar{M}_{y1} \\ -\bar{M}_{y1} & +GI_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{dus: } \frac{\bar{\varphi}}{\bar{v}} = \frac{\frac{F_{Ez}}{n_z^*} - F_c}{\bar{M}_{y1}} \quad \text{of: } \frac{\bar{\varphi}}{\bar{v}} = \frac{\bar{M}_{y1}}{GI_t} \quad (6.14a) \text{ en } (6.14b)$$

- N.B. 1. De grootte van $\bar{\varphi}$ is vooral afhankelijk van het moment \bar{M}_{y1} en alleen indirect (via de uitwijking \bar{v}) van de drukkracht F_c .
2. Zoals eerder is behandeld behoeft bij dit belastinggeval een dwarsbelasting in de 'zwakke' richting niet te worden uitgesloten. Deze belasting heeft geen invloed op de berekening van n_z^* maar heeft (via v_1) wel invloed op de uiteindelijke uitbuiging van de staaf en dus ook op de totale spanning.
3. De grootte van \bar{w} is onafhankelijk van \bar{v} en $\bar{\varphi}$ en omgekeerd, waardoor de term n_z^* onafhankelijk is van het gedrag van de staaf in de 'sterke' richting
4. Een 2^{de}-orde vergroting van w heeft weliswaar geen invloed op v maar veroorzaakt wel een vergroting van de 2^{de}-orde momenten om de y -as, zodat er daardoor wat minder draagvermogen overblijft voor buiging om de z -as.

6.1.2 Staaf op twee steunpunten, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting en een axiale drukkracht

Het belastingschema is overeenkomstig Hoofdstuk 5.1.2 en weergegeven in figuren 5.5 en 5.6, met dezelfde notaties voor alle variabelen.

Er wordt weer van uit gegaan dat de invloed van de vervorming in de 'sterke' richting kan worden verwaarloosd en een eventuele dwarsbelasting in de 'zwakke' richting geen invloed heeft op de berekening van n_z^* . Bij de toetsing op sterkte wordt een en ander uiteraard wel in rekening gebracht.

De vergelijkingen met de 2^{de}-orde momenten zijn te ontleen aan (6.01) die met (5.22) kunnen worden geschreven als:

buiging om de z -as	$EI_z v_2'' + F_c v + M_{y1} \varphi = 0$	(6.15)
rotatie om de x -as	$M_{t2} - GI_t \varphi = 0$	

Het moment: $M_{y1} = 0,5q_z x(L-x)$ is eenvoudig en onafhankelijk van de vervormingen te bepalen, maar het torsiemoment: $M_{t2} = M_{y1} v' + M_{x2}$ is ingewikkelder en bovendien afhankelijk van de uitbuiging en, bij excentrisch aangrijpende belasting, ook van de rotatie. Hier wordt verder gebruik gemaakt van de in Hoofdstuk 5.1 ontwikkelde formules (5.22) en volgende.

De uitwendige- en inwendige arbeid bestaat nu uit de in (6.04) genoemde vier componenten:

Arbeid	door buiging:
uitwendig:	$A_{um} = 0,5 \int_0^L M_{z2} (-v_2'') dx = 0,5 \int_0^L (M_{y1} \varphi + F_c v) (-v_2'') dx =$ $= 0,5 \int_0^L \left\{ 4 \bar{M}_{y1} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \bar{\varphi} + F_c \bar{v} \right\} \bar{v}_2 \frac{\pi^2}{L^2} \left(\sin \frac{\pi x}{L} \right)^2 dx =$ $= 2,144 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{\varphi} \bar{v}_2 + 2,467 \frac{F_c}{L} \bar{v} \bar{v}_2$
inwendig:	$A_{im} = 0,5 \int_0^L EI_z (v_2'')^2 dx = 0,5 EI_z \left(-\bar{v}_2 \frac{\pi^2}{L^2} \right)^2 \int_0^L \left(\sin \frac{\pi x}{L} \right)^2 dx =$ $= 0,5 EI_z \bar{v}_2^2 \frac{\pi^4}{L^4} \frac{L}{2} = 24,352 \frac{EI_z}{L^3} \bar{v}_2^2$

Arbeid	door torsie:
uitwendig:	$A_{ut} = +0,5 \int_0^L M_{t2} \varphi' dx =$ $= 0,5 \int_0^L 8 \bar{M}_{y1} \left[\frac{\bar{v}}{L} \left\{ \left(\frac{1}{\pi} + \frac{\pi x}{2L} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right) \cos \frac{\pi x}{L} - \left(0,5 - \frac{x}{L} \right) \sin \frac{\pi x}{L} \right\} + \right.$ $\left. - \frac{\bar{\varphi} e}{\pi L} \cos \frac{\pi x}{L} \right] \times \left(\bar{\varphi} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \right) dx =$ $= 2,144 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{v} \bar{\varphi} - 2,000 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} e \bar{\varphi}^2$
inwendig:	$A_{it} = 0,5 \int_0^L GI_t (\varphi')^2 dx =$ $= 0,5 GI_t \left(\bar{\varphi} \frac{\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \left(\cos \frac{\pi x}{L} \right)^2 dx = 0,5 GI_t \bar{\varphi}^2 \frac{\pi^2}{L^2} \frac{L}{2} =$ $= 2,467 \frac{GI_t}{L} \bar{\varphi}^2$

Samenvattend:

	A uitwendig	$-A$ inwendig	$= 0$
buiging:	$2,14 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{\varphi} \bar{v}_2 + 2,47 \frac{F_c}{L} \bar{v} \bar{v}_2$	$-24,35 \frac{EI_z}{L^3} \bar{v}_2^2$	$= 0$
torsie:	$2,14 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{v} \bar{\varphi} - 2,00 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} e \bar{\varphi}^2$	$-2,47 \frac{GI_t}{L} \bar{\varphi}^3$	

(6.16)

Dit is met: $A_u - A_i = 0$ in matrixvorm te schrijven als:

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} -\frac{24,35EI_z}{L^3} \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} + \frac{2,47F_c}{L} & 2,14 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \\ 2,14 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} & -2,00 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} e - \frac{2,47GI_t}{L} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \bar{v} \\ \bar{\varphi} \end{matrix} \right\} = 0 \quad (6.17)$$

Vermenigvuldiging met: $\frac{4L}{\pi^2} = \frac{L}{2,47}$ en substitutie van: $\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{1}{n_z^*}$ en: $\frac{\pi^2 EI_z}{L^2} = F_{Ez}$ geeft:

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} -\frac{F_{Ez}}{n_z^*} + F_c & +0,87 \bar{M}_{y1} \\ +0,87 \bar{M}_{y1} & -0,81 \bar{M}_{y1} e - GI_t \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \bar{v} \\ \bar{\varphi} \end{matrix} \right\} = 0 \quad (6.18)$$

Bij \bar{v} , \bar{v}_2 en $\bar{\varphi}$ alle ongelijk nul, wordt aan deze vergelijking voldaan als de determinant van de matrix nul is. Dit leidt tot:

$$\left(\frac{F_{Ez}}{n_z^*} - F_c \right) (0,81 \bar{M}_{y1} e + GI_t) - (0,87 \bar{M}_{y1})^2 = 0 \quad \text{of:}$$

$$\frac{(0,87 \bar{M}_{y1})^2}{(GI_t + 0,81 \bar{M}_{y1} e)} = F_{Ez} \left(\frac{1}{n_z^*} - \frac{F_c}{F_{Ez}} \right) \quad \text{en met: } F_{Ez} GI_t = M_{kr}^2 \text{ is het voorlopige resultaat:}$$

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,87 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,81 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (6.19)$$

Dit stemt (nagenoeg) overeen met de resultaten van de iteratiemethode in Hoofdstuk 5.1.2 volgens (5.37) en de uitwerkingen in Bijlage 5.1.2.

In Bijlage 6.1.2 wordt dit nader gepreciseerd door toevoeging van volgende Fouriertermen met een resultaat dat slechts enkele procenten afwijkt.

Gezien de grotere nauwkeurigheid van het stappenplan is het verantwoord om de aldaar gevonden formules als definitief te beschouwen.

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,88\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,81\bar{M}_{y1}eF_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (6.20)$$

De structuur van de formule is vergelijkbaar met (5.14) en (6.13) voor het belastinggeval van axiale drukkracht met constant moment, maar nu met toevoeging van:

- een reductiefactor $k_1 = 0,88$ wegens het niet constante momentenverloop,
 - een bijdrage ontleend aan de excentriciteit van het aangrijpingspunt van de belasting:
 - $e > 0$ vergroot de term n_z^* en is dus gunstig,
 - $e < 0$ verkleint de term n_z^* en is dus ongunstig.
- gecombineerd met een reductiefactor $k_2 = 0,81$.

6.1.3 Staaf op twee steunpunten, belast door geconcentreerde belasting (puntlast) in het midden van de staaf en een axiale drukkracht

Het belastingschema is overeenkomstig Hoofdstuk 5.1.3 en weergegeven in figuur 5.13 en 5.14, met dezelfde notaties voor alle variabelen.

Er wordt weer van uit gegaan dat de invloed van de vervorming in de 'sterke' richting kan worden verwaarloosd en een eventuele dwarsbelasting in de 'zwakke' richting geen invloed heeft op de berekening van n_z^* .

De vergelijkingen met de 2^{de}-orde momenten zijn identiek aan het belastinggeval met gelijkmatig verdeelde belasting:

buiging om de z -as	$EI_z v_2'' + F_c v_x + M_{y1} \phi = 0$	(6.21)
rotatie om de x -as	$M_{t2} - GI_t \phi = 0$	

Met als maximale moment: $\bar{M}_{y1} = \frac{F_z L}{4}$ is het momentenverloop lineair:

$$M_{y1} = 2\bar{M}_{y1} \frac{x}{L} \quad \text{voor: } 0 < x < 0,5L \quad (6.22a)$$

$$M_{y1} = 2\bar{M}_{y1} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \text{voor: } 0,5 < x < L \quad (6.22b)$$

Vanwege de symmetrie wordt verder alleen het gedeelte $0 < x < 0,5 L$ beschouwd. De belasting kan excentrisch aangrijpen (met excentriciteit e) en er gelden dezelfde randvoorwaarden als bij het belastinggeval met gelijkmatig verdeelde belasting. Het torsiemoment is nu iets eenvoudiger te berekenen omdat de component: $F_z e \varphi$ hier constant is.

De grootte van het torsiemoment wordt ontleend aan Hoofdstuk 5.1.3 (5.38) en volgende.

De uitwendige- en inwendige arbeid bestaat nu uit de in (6.04) genoemde vier componenten:

Arbeid	door buiging:
uitwendig:	$A_{um} = 0,5 \int_0^L M_{z2} (-v_2'') dx = 2 \cdot 0,5 \int_0^{0,5L} (M_{y1} \varphi + F_c v) (-v_2'') dx =$ $= \int_0^{0,5L} \left\{ 2\bar{M}_{y1} \frac{x}{L} \bar{\varphi} + F_c \bar{v} \right\} \bar{v}_2 \frac{\pi^2}{L^2} \left(\sin \frac{\pi x}{L} \right)^2 dx =$ $= 1,736 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{\varphi} \bar{v}_2 + 2,467 \frac{F_c}{L} \bar{v} \bar{v}_2$
inwendig:	overeenkomstig gelijkmatig verdeelde belasting: $A_{im} = 24,352 \frac{EI_z}{L^3} \bar{v}_2^2$

Arbeid	door torsie:
uitwendig:	$A_{ut} = +0,5 \int_0^L M_{t2} \varphi' dx = 2 \cdot 0,5 \int_0^{0,5L} M_{t2} \varphi' dx =$ $= \int_0^{0,5L} \bar{M}_{y1} \frac{2}{L} \left\{ \left(\frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi x}{L} + 1 - \sin \frac{\pi x}{L} \right) \bar{v} - e \bar{\varphi} \right\} \left(\bar{\varphi} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \right) dx =$ $= 1,736 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{v} \bar{\varphi} - 2,000 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} e \bar{\varphi}^2$
inwendig:	overeenkomstig gelijkmatig verdeelde belasting: $A_{it} = 2,467 \frac{GI_t}{L} \bar{\varphi}^2$

Samenvattend:

	A uitwendig	$-A$ inwendig	$= 0$
buiging:	$1,74 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{\varphi} \bar{v}_2 + 2,47 \frac{F_c}{L} \bar{v} \bar{v}_2$	$- 24,35 \frac{EI_z}{L^3} \bar{v}_2^2$	$= 0$
torsie:	$1,74 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{v} \bar{\varphi} - 2,00 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} e \bar{\varphi}^2$	$- 2,47 \frac{GI_t}{L} \bar{\varphi}^3$	

(6.23)

Dit is met: $A_u - A_i = 0$ in matrixvorm te schrijven als:

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} -\frac{24,35EI_z}{L^3} \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} + \frac{2,47F_c}{L} & 1,74 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \\ 1,74 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} & -2,00 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} e - \frac{2,47GI_t}{L} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \bar{v} \\ \bar{\varphi} \end{matrix} \right\} = 0 \quad (6.24)$$

Op dezelfde wijze als bij de gelijkmatig verdeelde belasting - zie formules (6.17) tot (6.19)

volgt hieruit met: $\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = n_z^*$ en: $k_1 = \frac{1,74}{2,14} = 0,71$ en: $k_2 = \frac{2,00}{2,47} = 0,81$ als voorlopig

resultaat:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,71\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,81\bar{M}_{y1}eF_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (6.25)$$

Dit wijkt naar verhouding iets meer af van de resultaten van de iteratiemethode in (5.1.3) dan is gevonden in 6.1.3 bij de gelijkmatig verdeelde belasting.

Verbetering van de benaderingen van de uitbuigings- en rotatielijn als 'zuivere' sinuslijn is mogelijk door toevoeging van een of meer Fouriertermen. In Bijlage 6.1.3 wordt dit nader onderzocht..

Gezien de grotere nauwkeurigheid van het stappenplan is het verantwoord om de aldaar gevonden formules (5.49) en (5.50) als definitief te beschouwen.

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,73\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,87\bar{M}_{y1}eF_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (6.26)$$

6.2 Uitkraging

Bij dit constructietype zijn voor de vervormingslijnen meer ingewikkelde functies nodig dan bij een staaf op twee steunpunten. In Hoofdstuk 5.2 is aannemelijk gemaakt dat er voor de uitbuigingslijnen v_2 en v in principe twee typen in aanmerking komen, die vooral verschillen in de vorm van de 2^{de} afgeleiden (met de daarmee evenredige M_z -lijnen) en de grootte van de aanwezige axiale drukkracht. Daarom zal nu worden begonnen met de in 5.2 ontwikkelde uitbuigingen en rotaties en hun afgeleiden, die luiden:

$$\begin{aligned}
 v &= \bar{v} \left\{ (1-a) \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L} \right) + a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \right\} & \varphi &= \frac{\bar{\varphi}}{(\pi-2)} \left\{ \frac{\pi x}{L} - 2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \right\} \\
 v' &= \frac{\bar{v}}{L} \left\{ (1-a) \left(1 - \cos \frac{\pi x}{L} \right) + a \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2L} \right\} & \varphi' &= \frac{\bar{\varphi} \pi}{L(\pi-2)} \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2L} \right) && \text{zie (5.53)} \\
 v'' &= \frac{\bar{v} \pi}{L^2} \left\{ (1-a) \sin \frac{\pi x}{L} + a \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi x}{2L} \right\} & \varphi'' &= \frac{\bar{\varphi} \pi^2}{2L^2(\pi-2)} \left(-\cos \frac{\pi x}{2L} \right)
 \end{aligned}$$

Hierin neemt de factor a toe met de grootte van een eventuele axiale drukkracht en/of dwarsbelasting in de 'zwakke' richting. Bij verdere uitwerking zal blijken (evenals bij de eerste aannamen bij de staaf op twee steunpunten) dat dit nog niet nauwkeurig genoeg is en dat het gewenst is om een volgende Fourierterm toe te voegen.

Evenals bij een staaf op twee steunpunten wordt er weer van uit gegaan dat de invloed van de vervorming in de 'sterke' richting kan worden verwaarloosd en dat een eventuele dwarsbelasting in de 'zwakke' richting geen invloed heeft op de berekening van n_z^* . Het op te lossen stelsel vergelijkingen is geheel te ontleen aan Hoofdstuk 5 en de uitwerking daarvan geschiedt met behulp van de methode van vormveranderingsarbeid, ondersteund door spreadsheetberekeningen.

6.2.1 Uitkraging, belast door een constant moment en een axiale drukkracht

Voor dit basisgeval met alleen een constant moment veroorzaakt door M_y aangebracht op het staafeinde zijn de mogelijke oplossingen voldoende besproken in Hoofdstuk 5.2.1 zodat hier geen toevoegingen nodig zijn.

6.2.2 Uitkraging, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting en een axiale drukkracht

Uitgegaan wordt van de uitbuigings- en rotatielijnen zoals beschreven in Hoofdstuk 5 vergelijkingen (5.53) en weergegeven in figuur 5.22.

Het op te lossen stelsel vergelijkingen is te ontleen aan Hoofdstuk 5.1.2 formules (5.01) en (5.22) en is te schrijven als:

buiging om de z -as	$M_{z2} = F_c (v - \bar{v}) + M_{y1} \varphi = -EI_z v'' / n_z^*$	zie (5.58)
torsie om de x -as	$M_{t2}' = M_{y1} v'' + q_z e \varphi = GI_t \varphi''$	

Het parabolisch verlopende moment: $M_{y1} = -0,5q_z (L - x)^2 = \bar{M}_{y1} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$ zie (5.59)

heeft bij de inklemming: $x = 0$, een maximale waarde: $\bar{M}_{y1} = -0,5q_z L^2$ zie (5.60)

Het verdere verloop van de procedure is geheel overeenkomstig de behandeling van de staaf op twee steunpunten.

Het moment in de 'zwakke' richting is:

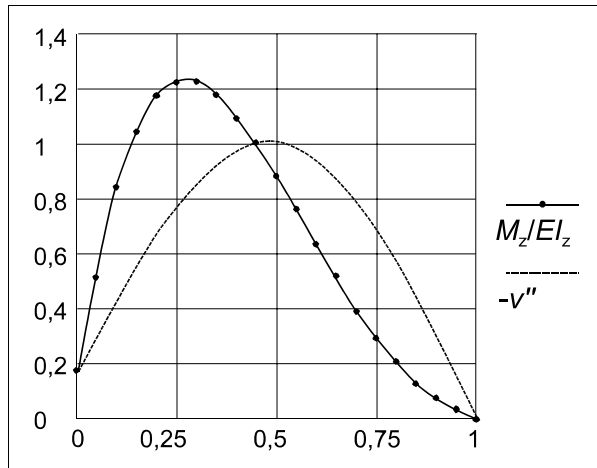
$$M_{z2} = M_y \varphi = \bar{M}_{y1} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{\bar{\varphi}}{(\pi - 2)} \left\{ \frac{\pi x}{L} - 2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) \right\} \quad (6.27)$$

De afgeleide van het torsiemoment wordt ontleend aan (5.22)

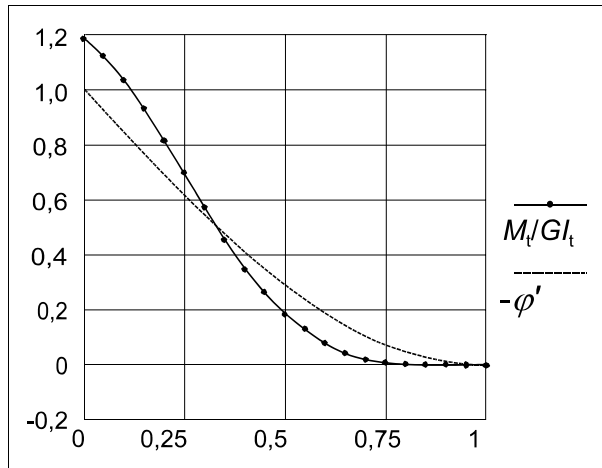
$$M_{t2}' = M_y v'' + q_e \varphi = \bar{M}_{y1} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 v'' - \frac{2\bar{M}_{y1}}{L^2} e \varphi, \text{ waaruit volgt:}$$

$$M_{t2} = \int_L^x (M_y v'' - q_z e \varphi) dx = \int_L^x \frac{\bar{M}_{y1}}{L^2} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \left\{ (1-a) \sin \frac{\pi x}{L} + a \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi x}{2L} \right\} \pi \bar{v} + \right. \\ \left. - \frac{2e}{(\pi - 2)} \left\{ \frac{\pi x}{L} - 2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) \right\} \bar{\varphi} \right] dx \quad (6.28)$$

Voor een combinatie van een q -belasting met een betrekkelijk kleine axiale drukkracht, waarvoor een waarde van: $a = 0,2$ als voorbeeld is genomen, is het berekende verloop van de (gereduceerde) momenten M_z / EI_z respectievelijk M_t / GI_t vergeleken met v'' respectievelijk φ' weergegeven in de figuren 6.1 en 6.2:

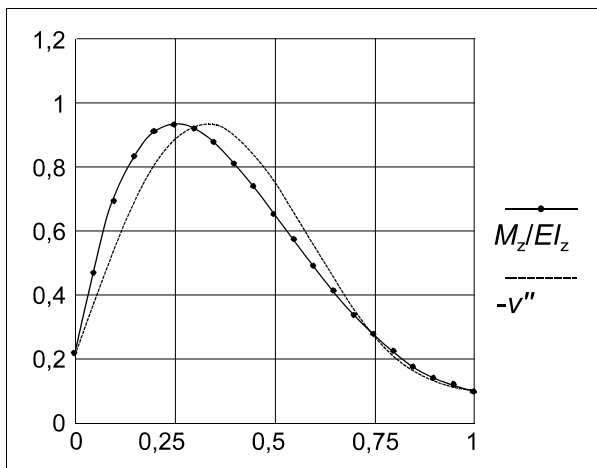


figuur 6.1

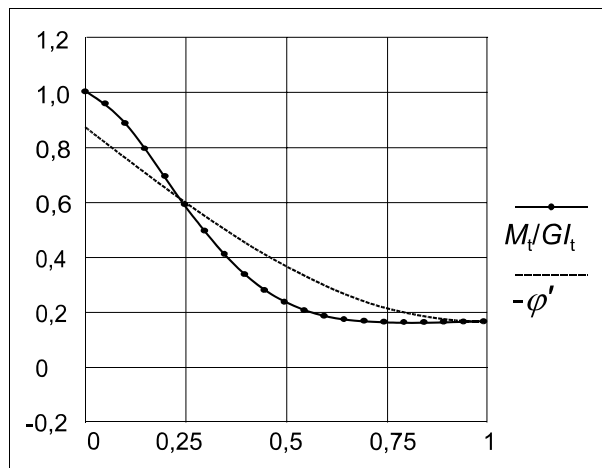


figuur 6.2

De affiniteit van deze lijnen kan aanzienlijk worden verbeterd door het invoeren van een 2^{de} Fourierterm, met als resultaat de lijnen in de figuren 6.3 en 6.4:



figuur 6.3



figuur 6.4

Nu is de overeenstemming voorlopig zeker acceptabel.

De verdere uitwerking met behulp van vormveranderingsarbeid verloopt overeenkomstig de voorgaande gevallen met staven op twee steunpunten.

De uitwendige- en inwendige arbeid bestaat weer uit de in (6.04) genoemde vier componenten, waarvan de berekende uitkomst is samen te vatten als:

	A uitwendig	$-A$ inwendig	$= 0$
buiging:	$0,232 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{\varphi} \bar{v}_2 + 0,674 \frac{F_c}{L} \bar{v} \bar{v}_2$	$-1,975 \frac{EI_z}{L^3} \bar{v}_2^2$	$= 0$
torsie:	$0,232 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{v} \bar{\varphi} - 0,724 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} e \bar{\varphi}^2$	$-1,187 \frac{GI_t}{L} \bar{\varphi}^2$	

(6.29)

Dit is met: $A_u - A_i = 0$ in matrixvorm te schrijven als:

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} -\frac{1,975EI_z}{L^3} \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} + \frac{0,674F_c}{L} & \frac{0,232\bar{M}_{y1}}{L} \\ \frac{0,232\bar{M}_{y1}}{L} & -\frac{0,724\bar{M}_{y1}}{L} e - \frac{1,187GI_t}{L} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \bar{v} \\ \bar{\varphi} \end{matrix} \right\} = 0 \quad (6.30)$$

Na substitutie van: $F_{Ez} = \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2}$ en: $\frac{1}{n^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}}$ volgt als determinant van de stijfheidsmatrix:

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{0,800F_{Ez}}{n^*} + 0,674F_c & 0,232\bar{M}_{y1} \\ 0,232\bar{M}_{y1} & -0,724\bar{M}_{y1}e - 1,187GI_t \end{vmatrix} \quad (6.31)$$

De evenwichtstoestand wordt gevonden als $D = 0$, dus:

$$\left(-\frac{0,800F_{Ez}}{n^*} + 0,674F_c \right) (-0,724\bar{M}_{y1}e - 1,187GI_t) - (0,232\bar{M}_{y1})^2 = 0$$

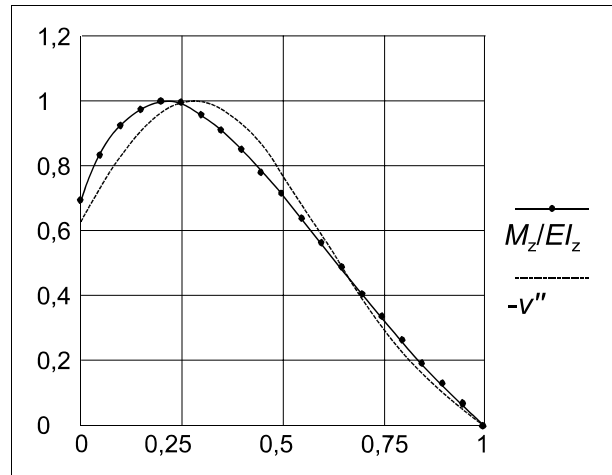
$$\left(-\frac{F_{Ez}}{n^*} + 0,843F_c \right) (-0,610\bar{M}_{y1}e - GI_t) = \frac{(0,232\bar{M}_{y1})^2}{0,800 \times 1,187} = (0,238\bar{M}_{y1})^2$$

Hieruit is met: $F_{Ez}GI_t = M_{kr}^2$ op dezelfde wijze als staven op twee steunpunten af te leiden, met in achtning van het 'teken' van \bar{M}_{y1} :

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,24\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,61|\bar{M}_{y1}|eF_{Ez}} + \frac{0,84F_c}{F_{Ez}} \quad (6.32)$$

Bij een grotere axiale drukkracht moet de vorm van de uitbuigingslijn worden aangepast, zodat hoe langer hoe meer een enkelvoudige (co)sinuslijn worden benaderd.

Als voorbeeld van een geval met een relatief vrij grote axiale drukkracht is de vergelijking tussen v'' en $\frac{M_z}{EI_z}$ weergegeven in figuur 6.5.



figuur 6.5

Voor de determinant van de bijbehorende arbeidsvergelijking wordt nu gevonden:

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{0,644F_{Ez}}{n^*} + 0,632F_c & 0,212\bar{M}_{y1} \\ 0,212\bar{M}_{y1} & -0,734\bar{M}_{y1}e - 1,242GI_t \end{vmatrix} \quad (6.33)$$

Bewerking op dezelfde wijze als hiervoor levert:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,24\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,59|\bar{M}_{y1}|eF_{Ez}} + \frac{0,98F_c}{F_{Ez}} \quad (6.34)$$

Zodra de axiale drukkracht groter wordt neemt de invloed van de gelijkmatig verdeelde belasting q_z langzamerhand af, zodat dan het 2^{de}-orde-effect van F_c hoofdzakelijk bepaald wordt door de Eulerse waarde.

Bij het controleren van de invloed van de excentriciteit e blijkt dat de waarde van k_2 niet geheel constant is, maar kleiner wordt bij toenemende positieve excentriciteit en omgekeerd. Omdat er binnen grenzen van: $-0,3 < e/L < +0,3$ bij de berekening van n_z^* een afwijking resulteert van maximaal slechts 2 %, wordt voorgesteld om als compromis tussen eenvoud en nauwkeurigheid toch een constante (gemiddelde) waarde aan te houden.

Overigens is het met deze methode zeer bewerkelijk om voor elke combinatie van zijdelingse belasting, excentriciteit, axiale drukkracht en geometrische eigenschappen van de staaf steeds de meest passende vormen van de vervormingslijnen te zoeken.

Daarom wordt voorgesteld om, vanwege de grotere nauwkeurigheid van de iteratiemethode, de aldaar gevonden formules als definitief te beschouwen.

Voor een uitkraging met een gelijkmatig verdeelde belasting en een axiale drukkracht geldt dan:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,24\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,65|\bar{M}_{y1}|eF_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (6.35)$$

6.2.3 Uitkraging, belast door een geconcentreerde belasting en een axiale drukkracht

Van toepassing zijn dezelfde uitgangspunten als bij een gelijkmatig verdeelde belasting en de in Hoofdstuk 5 toegepaste differentiaalvergelijkingen. Het op te lossen stelsel vergelijkingen is onveranderd:

buiging om de z-as	$M_{z2} = F_c(v - \bar{v}) + M_{y1}\phi = -EI_z v'' / n_z^*$	(6.36)
torsie om de x-as	$M_{t2} = M_{y1}v' + M_{x2} = GI_t \phi$	

Het lineair verlopende moment: $M_{y1} = -F_z(L - x) = \bar{M}_{y1} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$

heeft bij de inklemming: $x = 0$, een maximale waarde: $\bar{M}_{y1} = -F_z L$ (6.37)

Dit wordt uitgewerkt volgens dezelfde methode als hiervoor is toegepast voor een geconcentreerde belasting op een staaf op twee steunpunten, respectievelijk een gelijkmatig verdeelde belasting op een uitkraging en kan daarom hier beknopter worden besproken.

Bij een op het staafeind excentrisch aangrijpende last bevat de M_t -lijn een constant deel:

$$M_{t2,e} = -F_z e \bar{\phi}$$

zodat aan de torsielijn ϕ een constante term: $\phi' = -\frac{F_z e \bar{\phi}}{GI_t}$ moet worden toegevoegd.

De uitwendige- en inwendige arbeid bestaat weer uit de in (6.04) genoemde vier componenten, waarvan de berekende uitkomst is samen te vatten als:

	A uitwendig	$-A$ inwendig	$= 0$
buiging:	$0,350 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{\varphi} \bar{v}_2 + 0,697 \frac{F_c}{L} \bar{v} \bar{v}_2$	$- 2,028 \frac{EI_z}{L^3} \bar{v}_2^2$	$= 0$
torsie:	$0,350 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{v} \bar{\varphi} - 0,550 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} e \bar{\varphi}^2$	$- 0,974 \frac{GI_t}{L} \bar{\varphi}^2$	

(6.38)

Dit is met: $A_u - A_i = 0$ in matrixvorm te schrijven als:

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi} \end{matrix} \right\} \left[\begin{array}{cc} -\frac{2,028EI_z}{L^3} \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} + \frac{0,697F_c}{L} & \frac{0,350\bar{M}_{y1}}{L} \\ \frac{0,350\bar{M}_{y1}}{L} & -\frac{0,550\bar{M}_{y1}}{L} e - \frac{0,974GI_t}{L} \end{array} \right] \left\{ \begin{matrix} \bar{v} \\ \bar{\varphi} \end{matrix} \right\} = 0 \quad (6.39)$$

Op dezelfde wijze als bij de voorgaande belastinggevallen wordt evenwicht gevonden als de determinant van de vergelijking nul is, waaruit volgt:

$$\left(-\frac{F_{Ez}}{n^*} + 0,848F_c \right) (-0,564\bar{M}_{y1}e - GI_t) = \frac{2,467 \times (0,350\bar{M}_{y1})^2}{2,028 \times 0,974} = (0,391\bar{M}_{y1})^2$$

waaruit op dezelfde wijze als hiervoor is af te leiden:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,39M_y)^2}{M_{kr}^2 + 0,56M_y e F_{Ez}} + \frac{0,85F_c}{F_{Ez}} \quad (6.40)$$

Evenals bij een gelijkmatig verdeelde belasting blijken de factor $k_2 = 0,56$, respectievelijk de bij de axiale kracht behorende factor $0,98$ enigszins afhankelijk te zijn van de grootte van de excentriciteit, respectievelijk de axiale drukkracht.

Om dezelfde redenen als aldaar vermeld wordt daarom voorgesteld om ook hier de met het stappenplan gevonden formule (5.90) en (5.91) als definitief te beschouwen.

Voor een uitkraging met een axiale drukkracht en een geconcentreerde belasting op het staafteind de term n_z^* dan worden berekend met:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,41\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,57|\bar{M}_{y1}|eF_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (6.41)$$

N.B. Let weer op de absolute notatie van het moment in de noemer.

Hoofdstuk

7

Staven met zijdelings steunverband

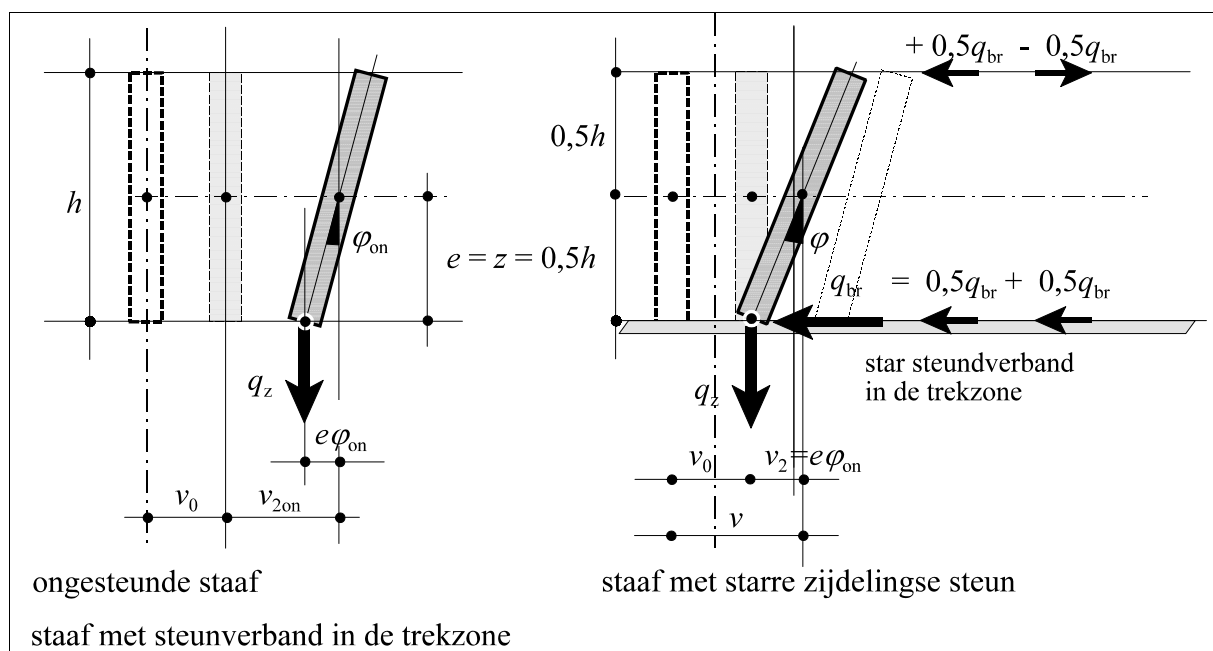
De in de voorgaande Hoofdstukken ontwikkelde methode is ook toepasbaar als de staaf door een stabiliteitsverband geheel of gedeeltelijk wordt verhinderd zijdelings te verplaatsen. Als het verband excentrisch is aangebracht wordt ook de rotatie van de staaf beïnvloed.

Uitgegaan wordt van de volgende aannamen:

- De staaf heeft een (sinusvormige) initiële uitbuiging v_0 en wordt in die positie tijdens de uitvoering spanningloos bevestigd aan het steunverband.
- In de verbinding ontstaat een reactiebelasting q_{br} (bracing = versterking door koppeling) waarvan het verloop eveneens (nagenoeg) sinusvormig is.

7.1 Star steunverband in de trekzone van de staaf

Bij een star steunverband bevestigd op $z = 0,5 h$ gerekend vanaf de neutrale lijn (positief in de richting van de belasting) blijft de plaats van de verbinding tussen staaf en steunverband bij toenemende belasting steeds gefixeerd op v_0 . Zie figuur 7.1.



figuur 7.1

Daardoor blijft er altijd een vaste verhouding bestaan tussen de rotatie φ en de 2^{de}-orde verplaatsing v_2 :

$$\varphi = \frac{v_2}{0,5h} \quad \text{of:} \quad v_2 = 0,5h\varphi \quad (7.01)$$

De verplaatsingen van de staaf zijn dus:

- a. gesteunde zijde: $v_{st} = v_0 + v_2 - 0,5h\varphi = v_0$
- b. midden van de staaf: $v_{mid} = v_0 + v_2$
- c. ongesteunde zijde: $v_{ong} = v_0 + v_2 + 0,5h\varphi = v_0 + 2v_2$

De reactiebelasting q_{br} kan worden gesplitst in twee componenten:

- a. $0,5 q_{br}$ (bij steunverband) en $0,5 q_{br}$ (bij de ongesteunde zijde), die samen een buigend moment M_{brz} om de z -as veroorzaken:

$$M_{brz} = 2 \frac{0,5\bar{q}_{br}L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L} = \bar{M}_{brz} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (7.02)$$

- b. $0,5 q_{br}$ (bij steunverband) en $-0,5 q_{br}$ (bij de ongesteunde zijde), die samen een torsiemoment M_{brt} om de staaf-as en bij kleine uitbuigingen dus ook om de x -as veroorzaken:

$$M_{brt} = - \int_{0,5L}^x 0,5q_{br} \times h dx = \bar{q}_{br} \frac{h L}{2 \pi} \cos \frac{\pi x}{L} = \bar{M}_{brz} \frac{h \pi}{2 L} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (7.03)$$

De verplaatsing en de rotatie van de staaf hierdoor zijn:

$$\bar{v}_{br} = \frac{\bar{M}_{brz}L^2}{\pi^2 EI_z} = \frac{\bar{M}_{brz}}{F_{Ez}} \quad (7.04)$$

$$\bar{\varphi}_{br} = \int_0^{0,5L} \frac{M_{brt}}{GI_t} dx = \int_0^{0,5L} \frac{\bar{M}_{brz}}{GI_t} \frac{h \pi}{2 L} \cos \frac{\pi x}{L} dx = \frac{\bar{M}_{brz}}{GI_t} \frac{h}{2} \quad (7.05)$$

De in de voorgaande Hoofdstukken ontwikkelde relaties tussen belastingen en vervormingen van ongesteunde staven zijn:

buiging om de z -as	$M_{z2} = + F_c v \quad + M_{y1} \varphi = - EI_z v_2''$	zie (5.01)
rotatie om de x -as	$M_{t2} = + M_{y1} v' + M_{x2} = + GI_t \varphi$	

Voor een (benaderd) sinus- respectievelijk cosinusvormig verloop van de buigende momenten M_{z2} respectievelijk de torsiemomenten M_{t2} werd hiervoor als oplossing gevonden:

$$\begin{cases} F_c \bar{v} & + k_1 \bar{M}_{y1} \bar{\varphi} & = F_{Ez} \bar{v}_2 \\ k_1 \bar{M}_{y1} \bar{v} & - k_2 \bar{M}_{y1} e \bar{\varphi} & = GI_t \bar{\varphi} \end{cases} \quad (7.06)$$

Hierop wordt nu gesuperponeerd de invloed van de momenten: M_{brz} (verkleint de buiging in de 'zwakke' richting) respectievelijk M_{brt} (vergroot de rotatie om de x -as):

$$\begin{cases} F_c \bar{v} & + k_1 \bar{M}_{y1} \bar{\varphi} & - \bar{M}_{brz} & = F_{Ez} \bar{v}_2 \\ k_1 \bar{M}_{y1} \bar{v} & - k_2 \bar{M}_{y1} e \bar{\varphi} & + \bar{M}_{brz} \frac{h}{2} & = GI_t \bar{\varphi} \end{cases} \quad (7.07)$$

Met: (7.01) en: $\bar{v} = \bar{v}_2 n_z^*$ (4.01) is dit te schrijven als:

$$\begin{cases} -F_{Ez} \bar{v}_2 + F_c \bar{v}_2 n_z^* & + k_1 \bar{M}_{y1} \frac{2\bar{v}_2}{h} & = \bar{M}_{brz} \\ k_1 \bar{M}_{y1} \bar{v}_2 n_z^* & - k_2 \bar{M}_{y1} e \frac{2\bar{v}_2}{h} - GI_t \frac{2\bar{v}_2}{h} & = -\bar{M}_{brz} \frac{h}{2} \end{cases} \quad (7.08)$$

Deze twee gekoppelde vergelijkingen zijn op te lossen door de verhouding $\bar{M}_{brz} / \bar{v}_2$ te elimineren met als resultaat:

$$-F_{Ez} + F_c n_z^* + k_1 \bar{M}_{y1} \frac{2}{h} = -\frac{2}{h} \left(k_1 \bar{M}_{y1} n_z^* - k_2 \bar{M}_{y1} \frac{2e}{h} - GI_t \frac{2}{h} \right) \quad (7.9)$$

Na herschikking volgt de gezochte 2^{de}-orde term:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1} + F_c \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} + \bar{M}_{y1} \left(-k_1 + k_2 \frac{2e}{h} \right)} \quad (7.10)$$

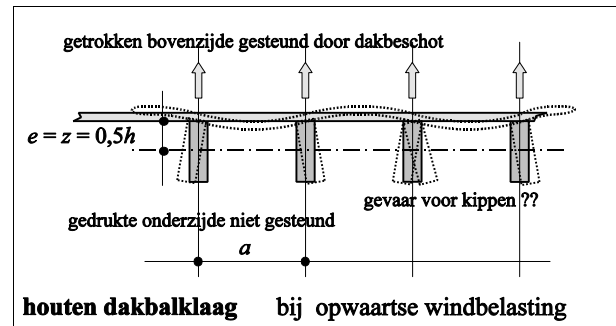
N.B. Vanwege de vergelijkbaarheid met de notaties bij ongesteunde staven wordt steeds de reciproque waarde $1/n_z^*$ gebruikt.

Hiermee kunnen dezelfde combinaties van belasting en axiale drukkracht worden berekend als in de Hoofdstukken 5. en 6. voor staven op twee steunpunten.

7.1.1 Mogelijke vereenvoudigingen

Bij belasting door windzuiging op wanden en daken zal de belasting meestal aangrijpen op het beschot (dat tevens als steunverband dienst doet), zodat als excentriciteit van de belasting kan worden gerekend met: $e = 0,5 h$.

Zie figuur 7.2, waar de positie van het steunverband en de richting van de belasting horizontaal zijn gespiegeld ten opzichte van figuur 7.1.



figuur 7.2

Met de factoren: $k_1 = 0,88$, respectievelijk: $k_2 = 0,81$ wordt de laatste term in de noemer van (7.10): $\bar{M}_{y1} (-0,88 + 0,81) = -0,07\bar{M}_{y1}$.

Verwaarlozing van deze zeer kleine term is iets onveilig, maar niet onverantwoord.

Bij een geconcentreerde belasting in het midden van de staaf wordt deze term:

$\bar{M}_{y1} (-0,73 + 0,87) = 0,14\bar{M}_{y1}$. Verwaarlozing hiervan is (iets te) veilig.

De term n_z^* kan dus worden bepaald met:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1} + F_c \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2}} \quad (7.11)$$

Analogie met torsiestijfheid

Bij nadere beschouwing van formule (7.11) blijkt er in de noemer een opmerkelijke overeenkomst te bestaan met de vergroting van de torsiestijfheid door verhinderde werving:

$$GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} = GI_{tor} \frac{2}{h} (1 + C_{tw}) + \frac{2}{h} \frac{F_{Ez}}{GI_{tor}} \frac{h^2}{4} = GI_{tor} \frac{2}{h} \left(1 + \frac{\pi^2}{L^2} \frac{EI_w}{GI_{tor}} + \frac{\pi^2}{L^2} \frac{EI_z}{GI_{tor}} \frac{h^2}{4} \right)$$

Voor rechthoekige (houten) doorsneden geldt:

$$I_w = \frac{b^3 h^3}{160} \quad \text{dus:} \quad I_z \frac{h^2}{4} = \frac{160}{48} I_w = 3,33 I_w \quad \text{zodat:}$$

$$GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} = GI_{tor} \frac{2}{h} (1 + 4,33 C_{tw}) \quad (7.12a)$$

Voor (stalen) I-profielen geldt:

$$I_w = \frac{I_z h^2}{4} \quad \text{dus:} \quad I_z \frac{h^2}{4} = I_w \quad \text{zodat:}$$

$$GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} = GI_{tor} \frac{2}{h} (1 + 2 C_{tw}) \quad (7.12b)$$

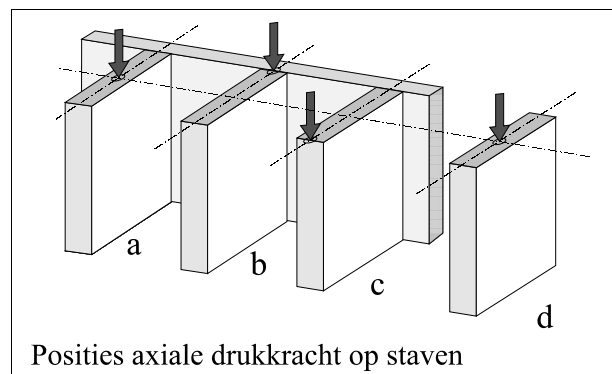
Aan bijlage B3.1 kan worden ontleend dat de component C_{tw} bij rechthoekige massieve doorsneden altijd zeer klein is en meestal veilig verwaarloosd kan worden. Bij I-profielen is deze component alleen verwaarloosbaar bij lange, smalle staven, maar zeker niet bij korte, brede staven.

7.1.2 Belasting door alleen een axiale drukkracht

Op het eerste gezicht lijkt dit uitsluitend een knikgeval te zijn, maar door de invloed van het zijdelingse steunverband ontstaan er evenwel toch torsie- en kipverschijnselen.

Aangenomen wordt dat het steunverband geen bijdrage levert aan het opnemen van de axiale drukkracht maar uitsluitend zijdelingse steun biedt aan de staaf.

De kracht kan aangrijpen op diverse posities. Zie figuur 7.3.



figuur 7.3

a. Centrische plaatsing

Bij gedrukte staven die aan één zijde worden gesteund is het veilig te rekenen alsof dit de trekzijde is. Als er geen zijdelings moment is bestaan er overigens geen druk- of trekzijden. Alle termen met M_{y1} vervallen zodat (7.10) kan worden vereenvoudigd tot:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{F_c \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2}} = \frac{F_c}{GI_t \frac{4}{h^2} + F_{Ez}} \quad (7.13)$$

Ten opzichte van een ongesteunde staaf geeft dit een aanzienlijke vergroting van de noemer en daarmee ook van de term n_z^* en dus uiteindelijk van de kniksterkte van de staaf.

b. Excentrische plaatsing op het snijpunt van staaf en steunverband

Nu ontstaat er een constant moment: $M_{y1} = -0,5hF_c$ met overige factoren: $k_1 = 1$ en: $e = 0$.

Invullen in (7.10) levert nu:
$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{-F_c \frac{h}{2} + F_c \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} + F \frac{h}{2} + 0} = 0 \quad (7.14)$$

Dat betekent: $n_z^* = \text{oneindig}$, waardoor de 2^{de}-orde uitbuiging: $\bar{v}_2 = 0$.

Zoals is te verwachten bestaat er in deze situatie dus geen knikgevaar in de 'zwakke' richting, maar mogelijk wel in de 'sterke' richting, waarvoor de gebruikelijke berekening met n_y^* kan worden uitgevoerd.

Bovendien treden er buigspanningen $\bar{\sigma}_{my1}$ op, die bij rechthoekige doorsneden drie maal zo groot en bij I-profielen circa 1,5 maal zo groot zijn als de drukspanning $\bar{\sigma}_c$.

c. Excentrische plaatsing op de vrije rand van de staaf

Nu geldt (7.10) met: $M_{y1} = +0,5hF_c$ en: $k_1 = 1$, en weer: $e = 0$, zodat:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{F_c \frac{h}{2} + F_c \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} - F_c \frac{h}{2} + 0} = \frac{F_c}{0,5 \left(GI_t \frac{4}{h^2} + F_{Ez} - F_c \right)} \quad (7.15)$$

Dit is ongunstiger dan de centrisch geplaatste drukkracht volgens geval **a**. zie (7.13). De term n_z^* wordt nu iets minder dan twee maal zo klein. De waarde van n_z^* verloopt dus ongeveer evenredig met de positie van de drukkracht ten opzichte van het steunverband.

Rekenvoorbeeld:

Een wand met houten stijlen, zie figuren 7.2 en 7.3.

$L = 4$ m, vrij smalle stijlen:

$$b = 35 \text{ mm}, \quad h = 200 \text{ mm},$$

met star zijdelings steunverband door triplexplaten.

Verdere gegevens:

$$F_{Ez} = 1,87 \text{ kN} \quad GI_t = 0,68 \text{ kNm}^2$$

Belast door een axiale drukkracht:

$$F_c = 10 \text{ kN}$$

initiële uitbuiging:

$$v_0 = L / 300 = 4000/300 = 13,3 \text{ mm}.$$

a. Drukkracht centrisch in het zwaartepunt van de doorsnede

De 2^{de}-orde factor is te berekenen met (7.13):
$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{10}{0,68 \frac{4}{0,2^2} + 1,87} = \frac{10}{69,9} = \frac{1}{7}$$

b. Drukkracht geconcentreerd op de gesteunde rand van de staaf

Door de directe zijdelingse steun is er in de 'zwakke' richting geen knikgevaar: $n_z^* = \infty$. In de 'sterke' richting is er bij de verhouding $b/h = 35 / 200$ met deze belasting evenmin knikgevaar te verwachten want:

$$F_{Ey} = 1,87 \frac{200^2}{35^2} = 61,1 \text{ kN} \quad \text{en dus: } n_y^* = n_y = \frac{61,1}{10} = 6,1$$

Wel treedt er bij deze excentrische drukkracht een buigspanning $\bar{\sigma}_{my1}$ op die drie maal zo groot is als de drukspanning en is er dus toetsing van de sterkte nodig. (Zie Hoofdstuk 8).

c. Drukkracht geconcentreerd op de vrije rand van de staaf

De 2^{de}-orde factor is te berekenen met (7.15):

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{10}{0,5 \left(0,68 \frac{4}{0,2^2} + 1,87 - 10 \right)} = \frac{10}{0,5 \times 59,9} = \frac{1}{3,0}$$

Door de verplaatsing van de belasting van het zwaartepunt naar de vrije rand van de doorsnede neemt de knikveiligheid af.

De uitbuiging van de gesteunde rand blijft evenwel beperkt tot de initiële uitbuiging, zoals eerder vermeld: $v_0 = 13,3$ mm, maar het midden van de staaf krijgt een totale uitbuiging:

$$\bar{v} = \frac{3}{3-1} \times 13,3 = 20 \text{ mm} \quad \text{en de uitbuiging bij de vrije rand wordt zelfs:}$$

$$\bar{v} = 13,3 + \frac{2}{3-1}13,3 = 26,6 \text{ mm}$$

Door de excentriciteit van de drukkracht ontstaan hier (extra) buigspanningen die even groot zijn als in geval **b**: $\bar{\sigma}_{my1} = 3\sigma_c$

d. Ongesteund

Ter vergelijking: De staaf zou zeker bezwijken omdat de in rekening gebrachte drukkracht groter is dan de kniksterkte F_{Ez} .

7.1.3 Belasting door een gelijkmatig verdeelde belasting zonder axiale drukkracht

Van toepassing is formule (7.11) waarbij in de teller de term met F_c vervalt, zodat overblijft:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{0,88\bar{M}_{y1}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2}} \quad (7.16)$$

Rekenvoorbeeld

Dezelfde constructie als bij het voorbeeld in Hoofdstuk 7.1.2, nu toegepast als: houten dakbalklaag, zie figuur 7.2.

$$L = 4 \text{ m}, b = 35 \text{ mm}, h = 200 \text{ mm}, F_{Ez} = 1,87 \text{ kN}, GI_t = 0,68 \text{ kNm}^2$$

Belast door een opwaartse belasting (door windzuiging minus eigen gewicht):

$$q = 0,5 \text{ kN/m} \quad \bar{M}_{y1} = 1 \text{ kNm} \quad \bar{\sigma}_{my1} = 4,29 \text{ N/mm}^2.$$

De 2^{de}-orde term is met (7.16) te berekenen als:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{0,88 \times 1,0}{0,68 \times \frac{2}{0,2} + 1,87 \times \frac{0,2}{2}} = \frac{0,88}{6,8 + 0,19} = 0,126 = \frac{1}{7,9}$$

Ongesteund zou dit met (5.37) zijn:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,88 \times 1,0)^2}{0,68 \times 1,87 + 0,81 \times 1,0 \times 0,1 \times 1,87} = \frac{0,77}{1,27 + 0,15} = 0,54 = \frac{1}{1,84}$$

Door de steun van het triplex wordt hier de 2^{de}-orde factor n_z^* ruim 4 maal zo groot.

Variant

Dezelfde constructie, maar nu met brede, lage balken: $b = 90 \text{ mm}$, $h = 125 \text{ mm}$
 grotere stijfheden: $F_{Ez} = 19,9 \text{ kN}$ $GI_t = 4,41 \text{ kNm}^2$
 dezelfde belasting en buigspanning: $q = 0,5 \text{ kN/m}$ $\bar{M}_{y1} = 1 \text{ kNm}$ $\bar{\sigma}_{my1} = 4,27 \text{ N/mm}^2$.

De 2^{de}-orde term is nu:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{0,88 \times 1,0}{4,41 \times \frac{2}{0,125} + 19,9 \times \frac{0,125}{2}} = \frac{0,88}{70,56 + 1,24} = 0,012 = \frac{1}{81,6}$$

Ongesteund zou dit met (5.37) zijn:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,88 \times 1,0)^2}{19,9 \times 4,41 + 0,81 \times 1,0 \times 0,5 \times 0,125 \times 19,9} = \frac{0,77}{87,76 + 1,01} = 0,009 = \frac{1}{114,6}$$

Opmerkelijk: In dit geval heeft het steunverband een ongunstige invloed op de (overigens zeer grote) 2^{de}-orde term.

Het is dus niet bij voorbaat zeker dat het steunen van de trekzijde altijd een vermindering oplevert van de 2^{de}-orde effecten in de staaf.

Wat hiervan de oorzaak kan zijn wordt onderzocht in Bijlage 7.1.

7.1.4 Grootte van de reactiekracht

Om het steunverband te controleren kan berekening van de steunreactie Q_{br} en het moment \bar{M}_{brz} soms gewenst zijn. Dit is mogelijk met (7.08), waarvan beide vergelijkingen dezelfde uitkomst geven. Voor de berekening van \bar{M}_{brz} kan worden gekozen uit:

$$\begin{cases} \bar{M}_{brz} = \left(-F_{Ez} + F_c n_z^* + k_1 \bar{M}_{y1} \frac{2}{h} \right) \bar{v}_2 \\ \bar{M}_{brz} = \left(-k_1 \bar{M}_{y1} \frac{2}{h} n_z^* + k_2 \bar{M}_{y1} e \frac{4}{h^2} + GI_t \frac{4}{h^2} \right) \bar{v}_2 \end{cases} \quad (7.17)$$

Hierin is de 2^{de}-orde uitbuiging: $\bar{v}_2 = \frac{\bar{v}_0}{n_z^* - 1}$

Vanwege het (aangenomen) sinusvormig verloop van M_{brz} en q_{br} heeft de dwarskracht V_{br} een cosinusvormig verloop met een maximum bij de oplegpunten.

De totale reactie Q_{br} die door het steunverband moet worden opgenomen is dan:

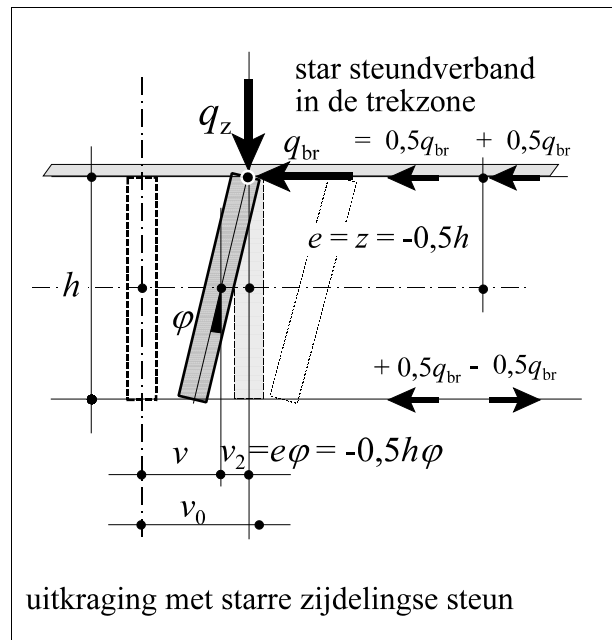
$$Q_{br} = \frac{2}{\pi} \bar{q}_{br} L = \frac{2\pi \bar{M}_{brz}}{L} \quad (7.18)$$

Overigens is deze reactiekracht (door de mintekens in de formules en ook door de kleine waarde van de initiële uitbuiging v_0) relatief klein en kan in sommige gevallen zelfs nul of negatief worden. (zie Bijlage 7.1).

7.2 Uitkraging met steunverband in de trekzone

Oppervlakkig gezien is de doorsnede van een uitkraging op te vatten als het horizontale spiegelbeeld van de doorsnede van een staaf op twee steunpunten.

Vergelijk de figuren 7.1 en 7.4.



figuur 7.4

Er zijn echter aanmerkelijke verschillen wat betreft de vormen van de buigende- en torderende momentenlijnen en de uitbuigings- en torsielijnen.

Voor de veel ingewikkelder en lastiger te vereenvoudigen wiskundige vergelijkingen zijn opvallend. In de Hoofdstukken 5 en 6 werd voor ongesteunde uitkragingen een oplossing gevonden, die bij benadering ook bruikbaar is voor uitkragingen met zijdelings steunverband. Dezelfde methode als in Hoofdstuk 7.2 wordt weer toegepast, maar nu met negatieve tekens van:

- e = aangrijpingspunt van de belasting,
- z = aangrijpingspunt van de steunreactie
- M_{y1} = moment ten gevolge van (neerwaarse) belasting op de uitkraging.

Het verloop van q_{br} (en het hierdoor veroorzaakte moment M_{brz} en de uitbuiging v_{br}) zijn bij uitkragingen niet zo fraai met sinuslijnen te benaderen als bij staven op twee steunpunten. Voor het hier gestelde doel is het niet direct nodig om q_{br} exact te berekenen maar kan worden volstaan met het bepalen van M_{brz} . Immers, het torsiemoment M_{brt} ontstaat, evenals het buigend moment M_{brz} , door twee maal integreren van q_{br} zoals te zien is in formules (7.02), (7.03) en (7.05). Daardoor veroorzaakt M_{br} een rotatie aan het eind van de staaf:

$$\bar{\varphi} = \int_0^L \frac{M_{brt}}{GI_t} dx = \int_0^L \frac{V_{br}(-0,5h)}{GI_t} dx = -\frac{\bar{M}_{brz} h}{2GI_t} \quad (7.19)$$

Het verschil met (7.05) is het teken, dat nu negatief is omdat: $z = -0,5h$. Gezien de in Hoofdstuk 7.2 gevonden resultaten met betrekking tot de invloed van de stijfheid van het steunverband wordt hier verder volstaan met het beschouwen van een star steunverband. Daardoor is de verhouding tussen v_2 en φ .

$$\varphi = \frac{-v_2}{0,5h} \quad \text{of:} \quad v_2 = -0,5h\varphi \quad (7.20)$$

Voor een ongesteunde uitkraging worden de relaties tussen belastingen en vervormingen ontleend aan:

buiging om de z -as	$M_{z2} = +F_c(v - \bar{v}) + M_{y1}\varphi = -EI_z v_2''$	zie (5.56)
torsie om de x -as	$M_{t2}' = +M_{y1}v'' - qe\varphi = GI_t\varphi''$	

Hiervoor is, vergelijkbaar met staven op twee steunpunten, als oplossing te vinden:

$$\begin{aligned} -F_c\bar{v} + k_1\bar{M}_{y1}\bar{\varphi} &= -F_{Ez}\bar{v}_2 \\ -k_1\bar{M}_{y1}\bar{v} + k_2\bar{M}_{y1}e\bar{\varphi} &= GI_t\bar{\varphi} \end{aligned} \quad (7.21)$$

N.B. Bedacht moet worden dat bij uitkragingen de waarde van M_y negatief is.

Positieve waarden van \bar{v} , \bar{v}_2 en $\bar{\varphi}$ veroorzaken:

- in de eerste rij: negatieve buigende momenten M_{z2} ,
- in de tweede rij: positieve torsiemomenten (min maal min) ten gevolge van de belasting en een vergroting hiervan bij negatieve waarde van e (zie figuur 7.4)

Hierop wordt gesuperponeerd de invloed van de momenten: M_{brz} , respectievelijk M_{brt} die beiden de (absolute) buiging in de 'zwakke' richting, respectievelijk de rotatie om de x -as, verkleinen:

$$\begin{cases} F_{Ez} \bar{v}_2 - F_c \bar{v} & + k_1 \bar{M}_{y1} \bar{\varphi} & + \bar{M}_{brz} & = 0 \\ -k_1 \bar{M}_{y1} \bar{v} & + k_2 \bar{M}_{y1} e \bar{\varphi} - GI_t \bar{\varphi} & - 0,5 \bar{M}_{brz} h & = 0 \end{cases} \quad (7.22)$$

Met (7.19) kan dit, na vermenigvuldigen van de eerste rij met $0,5h$, worden geschreven als:

$$\begin{cases} -0,5 F_{Ez} h \bar{v}_2 & + 0,5 F_c h \bar{v} & + k_1 \bar{M}_{y1} \bar{v}_2 & = 0,5 \bar{M}_{brz} h \\ -k_1 \bar{M}_{y1} \bar{v} & + k_2 \bar{M}_{y1} e \frac{-\bar{v}_2}{0,5h} & - GI_t \frac{-\bar{v}_2}{0,5h} & = 0,5 \bar{M}_{brz} h \end{cases} \quad (7.23)$$

Na deling door \bar{v}_2 en substitutie van $n_z^* = \frac{\bar{v}}{\bar{v}_2}$ leidt gelijkstelling van beide rijen tot:

$$-0,5 F_{Ez} h + 0,5 F_c h n_z^* + k_1 \bar{M}_{y1} = -k_1 \bar{M}_{y1} n_z^* - k_2 \bar{M}_{y1} \frac{2e}{h} + GI_t \frac{2}{h} \quad (7.24)$$

Na herschikking volgt de gezochte 2^{de}-orde term:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1} + F_c \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} - \bar{M}_{y1} \left(k_1 + k_2 \frac{2e}{h} \right)} \quad (7.25)$$

Omdat de vormen van de v - en φ -lijnen niet veel afwijken van die van een ongesteunde uitkraging kunnen voor de factoren k_1 en k_2 dezelfde waarden worden gehanteerd als gevonden in de Hoofdstukken 5 en 6.

Bij uitkragingen met aangrijppingspunt van de belasting op het steunverband (zie figuur 7.12) geldt: $e = -0,5h$ zodat (7.25) dan overgaat in:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1} + F_c \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} - \bar{M}_{y1} (k_1 - k_2)} \quad (7.26)$$

N.B. Bij staven op twee steunpunten met steunverband in de trekzone geldt formule (7.10) die bij positieve excentriciteit met: $e = 0,5h$ (zie figuur 7.1) kan worden geschreven als:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1} + F_c \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} + \bar{M}_{y1} (-k_1 + k_2)} \quad \text{wat geheel overeenkomt met (7.26).}$$

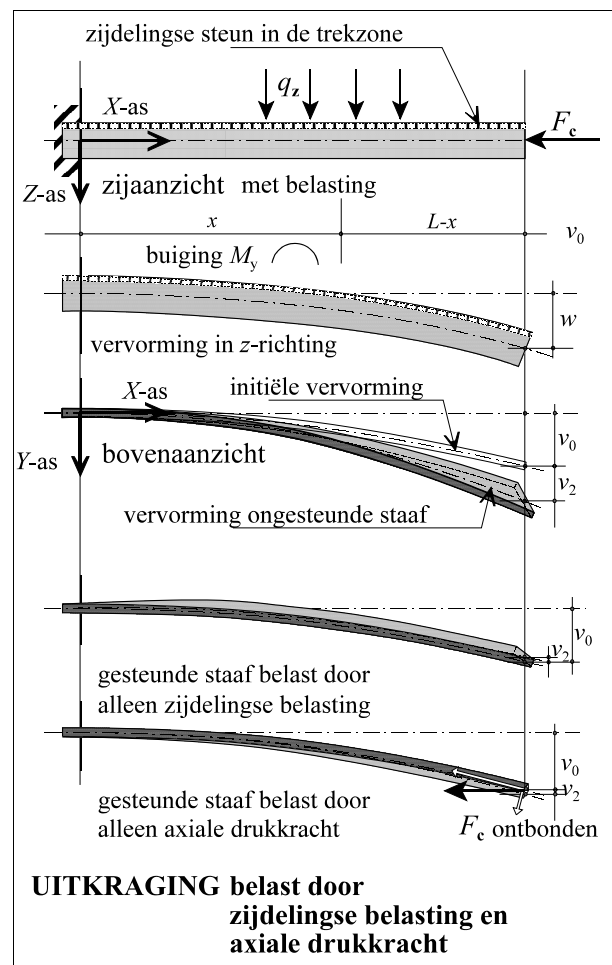
Toch zijn er opmerkelijke verschillen in de resultaten van beide formules.

Omdat bij uitkragingen het moment M_y negatief is zal bij een overheersende zijdelingse belasting (met buigende momenten om de y -as) de teller van (7.25) en dus ook n_z^* en daardoor eveneens de 2^{de}-ordeverplaatsing \bar{v}_2 negatief worden. De totale verplaatsing \bar{v} wordt daarbij dus kleiner dan \bar{v}_0 , hetgeen visueel is te verklaren met behulp van figuur 7.5.

De getrokken bovenzijde van de uitkraging die gekoppeld is aan het steunverband vervormt niet en de gedrukte onderzijde wordt krommer.

Bij een overheersende axiale drukkracht F_c wordt \bar{v}_2 positief waardoor \bar{v} dus groter wordt dan \bar{v}_0 , terwijl ϕ negatief wordt.

Dit is in overeenstemming met de richting van de kleinste ontbonden component van F_c (zie figuur 7.5 rechts onder).



figuur 7.5

De overgangssituatie tussen negatieve en positieve 2^{de}-orde vervormingen doet zich voor bij een belastingcombinatie waarbij: $-k_1 \bar{M}_{y1} = 0,5 F_c h$, met als resultaat dat: $n_z^* = \infty$, en dus: $\bar{v}_2 = 0$.

Ten opzichte van het uitgangspunt (met initiële uitwijking v_0) verandert er dan niets in de 'zwakke' richting en de staaf roteert ook niet.

De enige vervorming die hierbij optreedt is de uitbuiging w in de 'sterke' richting, waarop het steunverband verder geen invloed heeft.

- N.B. 1. De negatieve excentriciteit (te herkennen aan de factor k_2) verkleint, in combinatie met het negatieve moment, de noemer van (7.25) en heeft dus (zoals is te verwachten) een ongunstige werking.
2. Het verloop van v_2 en φ is gelijkvormig, evenals dat van hun afgeleiden. Bij de inklemming ($x = 0$) geldt: $v'_2 = \varphi' = 0$. Het kan dus niet anders of het torsiemoment aldaar wordt uitsluitend opgenomen door de welvingscomponent. (zie Bijlage 3 voor een nadere beschouwing over torsie en welving).

7.3 Invloed van de 2^{de}-orde effecten op het draagvermogen

Een kleine term n_z^* leidt tot een grote 2^{de}-orde uitbuiging en daardoor tot een vergroting van de totale spanning. Welke invloeden de in het voorgaande beschouwde effecten hebben op de spanningen in de maatgevende staafdoorsnede en daarmee op het draagvermogen van de staaf wordt nagegaan in Hoofdstuk 8.

Hoofdstuk

8

Toets op sterkte en stijfheid

Met behulp van de term n_z^* en de daarmee te berekenen 2^{de}-orde vergrotingsfactor kan het gedrag van de constructie overzichtelijk worden geanalyseerd. Voor praktische toepassingen kunnen (moeten) toetsingscriteria worden ontleend aan de van toepassing zijnde normen. Hierin zijn meestal zeer gedetailleerde reken- en controleregels opgenomen, onderscheiden naar constructiematerialen en geldigheidsgebieden. Omdat normen regelmatig worden herzien wordt er in deze dissertatie zo weinig mogelijk naar verwezen en is een autonome berekeningsmethode ontwikkeld voor kip- en knikstabiliteit van staven gebaseerd op een eenvoudig te formuleren algemeen principe:

De weerstand van een belaste staaf tegen de in rekening te brengen belastingen en vervormingen moet voldoende zijn en blijven.

Omdat over de te hanteren criteria toch consensus moet zijn wordt wel een aantal termen en begrippen ontleend aan de Nederlandse norm NEN 6700 (Technische grondslagen voor bouwconstructies) en de hierop gebaseerde normen betreffende de constructiematerialen hout, staal en beton, zodat onderlinge vergelijking in principe goed mogelijk is.

8.1 Toetsprocedure

Bij de beoordeling van stabiliteit, sterkte en stijfheid van bouwconstructies in het algemeen en (in het kader van deze dissertatie) van belaste staven wordt onderscheid gemaakt in twee grenstoestanden waarin de staaf kan verkeren:

- De UGT ¹ (uiterste grenstoestand) wat betreft de sterkte, concreet te formuleren in de totale maatgevende spanning,
- De BGT (bruikbaarheidsgrenstoestand) wat betreft de maatgevende vervorming.

In de UGT zijn de in rekening te brengen belastingen (door de in te voeren belastingfactoren) groter en is de E -modulus (op statistische gronden - afhankelijk van het materiaal) soms kleiner dan in de BGT. Daardoor is de waarde van n_z^* in de BGT altijd groter (en zijn daardoor de 2^{de}-orde effecten dus kleiner) dan in de UGT.

¹ benamingen volgens NEN 6702 [42a]

Bij stabiliteitsgevallen doet zich de complicatie voor dat ten gevolge van vervormingen de staaf door 2^{de}-orde effecten extra spanningen moet opnemen, met daardoor een vergrote kans op bezwijken. Hoewel hierbij een vervormingsberekening nodig is wordt deze bezwijkvorm toch getoetst in de UGT. Overigens kunnen vervormingen in beide grenstoestanden met dezelfde methodiek worden berekend.

Het principe van de toetsprocedure is eenvoudig:

- UGT: - nagegaan wordt in welke doorsnede de maatgevende rekenspanning optreedt,
 - de rekenspanning (superpositie van alle relevante spanningen) wordt vergeleken met de rekensterkte van het materiaal.
- BGT: - nagegaan wordt waar de maatgevende vervorming optreedt,
 - deze vervorming wordt vergeleken met de toelaatbare vervorming volgens de te stellen eisen.

8.2 Toetsen van de sterkte in de UGT

Het gaat bij de hier bedoelde stabiliteitsproblemen vooral om buigspanningen en (in mindere mate) om drukspanningen. Omdat al deze spanningen optreden in de lengterichting van de staaf kunnen zij eenvoudig lineair gesuperponeerd worden zolang de wet van Hooke (evenredigheid van spanningen en vervormingen) van toepassing is.

In sommige gevallen gelden er spanningscriteria waarbij wordt afgeweken van lineaire superpositie, bijvoorbeeld als er normaal- en schuifspanningen moeten worden gecombineerd.

In het algemeen kan in de UGT de sterkte worden getoetst met:

$$\frac{F_c}{F_u} + \frac{\bar{M}_y}{M_{uy}} + \frac{\bar{M}_z}{M_{uz}} \leq 1 \quad (8.01)$$

Hierin zijn: $M_{uy} = W_y f_{mu}$, $M_{uz} = W_z f_{mu}$, $F_{cu} = Af_{cu}$
 (zie Hoofdstuk 3.2.1 voor verklaringen bij de notaties).

Het moment M_z is als regel een 2^{de}-orde moment waarvan de maximale grootte volgt uit (5.08) en (5.32):

$$\bar{M}_{z2} = -EI_z \bar{v}_2'' \quad (8.02)$$

Hoewel in principe niet geheel uitgesloten, zal het zelden voorkomen dat de hier bedoelde staven in de 'zwakke' richting een belasting moeten opnemen.

Om het moment M_{z2} te kunnen bepalen kan worden begonnen met berekenen van de 2^{de}-ordefactor n_z^* met de algemene in de Hoofdstukken 5 en 6 ontwikkelde formule:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kip}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (8.03)$$

Hierin zijn:

\bar{M}_{y1} = het maximale in de staaf optredende moment

F_c = de axiale drukkracht

e = de (eventuele) excentriciteit van de belasting (in de z -richting)

k_1 en k_2 zijn factoren afhankelijk van het staaftype en de belasting. zie de tabel:

ontleend aan hoofdstukken 5 en 6.

type staaf	belasting	k_1	k_2
staaf op twee steunpunten	constant moment	1,0	nvt
	gelijkmatig verdeeld	0,88	0,81
	geconcentreerd in het staafmidden	0,73	0,87
uitkraging	gelijkmatig verdeeld	0,24	0,65
	geconcentreerd in het staafeind	0,41	0,57

M_{kip} = het 'kritisch' kipmoment:

$$M_{kip} = \sqrt{GI_t F_{Ez}} \quad (8.04)$$

F_{Ez} = de kniksterkte volgens Euler:

$$F_{Ez} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (8.05)$$

GI_t = de effectieve torsiestijfheid (zie Bijlage 3):

$$GI_t = GI_{tor} (1 + k_4 C_{tw}) \quad (8.06)$$

C_{tw} = de bijdrage door de verhinderde welving:

$$C_{tw} = \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_{tor}} \quad (8.07)$$

bij: I-profielen:

$$EI_w \approx \frac{EI_z h^2}{4} \quad (8.08)$$

bij: rechthoekige doorsneden (nauwelijks van belang)

$$EI_w \approx \frac{b^3 h^3}{160} \quad (8.09)$$

k_4 = een factor afhankelijk van het staaftype en de ondersteuning. zie de tabel:

ontleend aan Bijlage 3.

type staaf	ondersteuning	k_4
staaf op twee steunpunten	gaffelopleggingen	1
	inklemmingen	5,5
uitkraging	gaffeloplegging	nvt
	inklemming	1

Daarmee zijn de verhoudingen tussen de initiële (en de eventuele 1^{ste}-orde) uitbuiging, de 2^{de}-orde uitbuiging en de totale uitbuiging vastgelegd zoals is afgeleid in (4.01) en (4.02):

$$\bar{v} = n_z^* \bar{v}_2 = (\bar{v}_0 + \bar{v}_1) \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} \quad (8.10)$$

De grootte van \bar{v}_0 kan meestal ontleend worden aan de betreffende norm en wordt in het algemeen uitgedrukt in verhouding met de staaflengte L

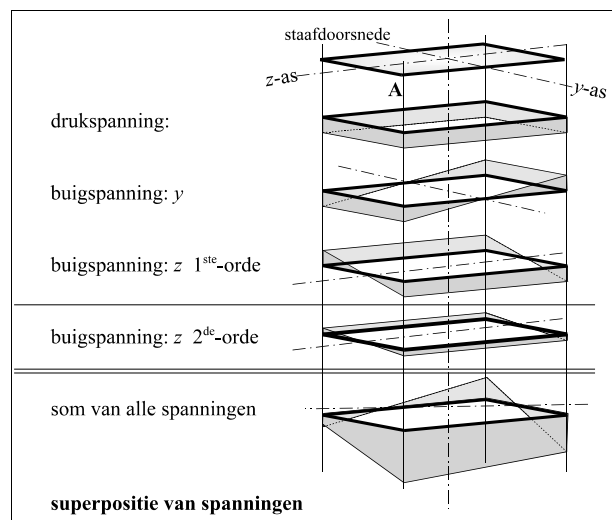
(orde van grootte: $\bar{v}_0/L = 1/1000$ tot $1/200$).

De relatie tussen \bar{v}_2 en \bar{M}_{z2} komt aan de orde in de volgende Hoofdstukken.

Een bijzondere vorm van buiging om de z -as ontstaat als de verhinderde welving van de doorsneden een belangrijk aandeel heeft in de torsiestijfheid van de staaf. Dit is vooral het geval bij (stalen) I-profielen, maar verwaarloosbaar bij rechthoekige (houten en beton) doorsneden. De hierbij optredende flensbuigingsmomenten moeten worden opgenomen door de weerstandsmomenten van de flenzen. Zij werken om de z -as zodat hierdoor een extra component van M_{z2} moet worden gesuperponeerd. Zie Bijlage 3.

Vervolgens zal worden nagegaan in welke doorsnede(n) moet worden getoetst.

Omdat alle druk- en buigspanningen optreden in de lengterichting van de staaf kunnen zij, zolang de wet van Hooke (betreffende evenredigheid van spanningen en vervormingen) geldig is, eenvoudig worden gesuperponeerd. Zie figuur 8.1.



figuur 8.1

Bij materialen met verschillende druk- en buigsterkten (bijvoorbeeld hout) kan hiermee rekening worden gehouden door het toetscriterium in spanningsnotatie te schrijven. Formule (8.01) gaat dan over in:

$$\frac{\sigma_c}{f_c} + \frac{\bar{\sigma}_{my1}}{f_m} + \frac{\bar{\sigma}_{mz2}}{f_m} \leq 1 \quad (8.11)$$

Overigens kunnen verschillen in buig- en druksterkte ook uitstekend in rekening worden gebracht bij toepassing van (8.01).

N.B. De overall constante drukspanning kan buiten beschouwing blijven bij het zoeken naar de plaats waar de maatgevende spanning optreedt, maar uiteraard niet bij de sterktoets.

8.2.1 Staven op twee steunpunten met gaffelopleggingen

Bij de hier behandelde symmetrische belastinggevallen treden de maximale momenten \bar{M}_{y1} en \bar{M}_{z2} op in dezelfde doorsnede in het midden van de overspanning.

Bij asymmetrische belastinggevallen moet apart worden nagegaan (of benaderd) waar de maatgevende doorsnede zich bevindt en hoe groot de momenten, de drukkracht en de spanningen daar zijn.

In Hoofdstuk 5 is met (5.33) berekend:
$$v_2 = \int_0^x \int_x^{0,5L} v_2'' dx dx = - \int_0^x \int_x^{0,5L} \frac{M_z}{EI_z} dx dx$$

Met (5.32) en (5.34) volgt daaruit:
$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{M}_z}{EI_z} \frac{g_{1g}}{g_{1f}} \frac{L^2}{\pi^2}$$
 wat ook geschreven kan worden als:

$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{M}_z}{k_3 F_{Ez}} \quad (8.12)$$

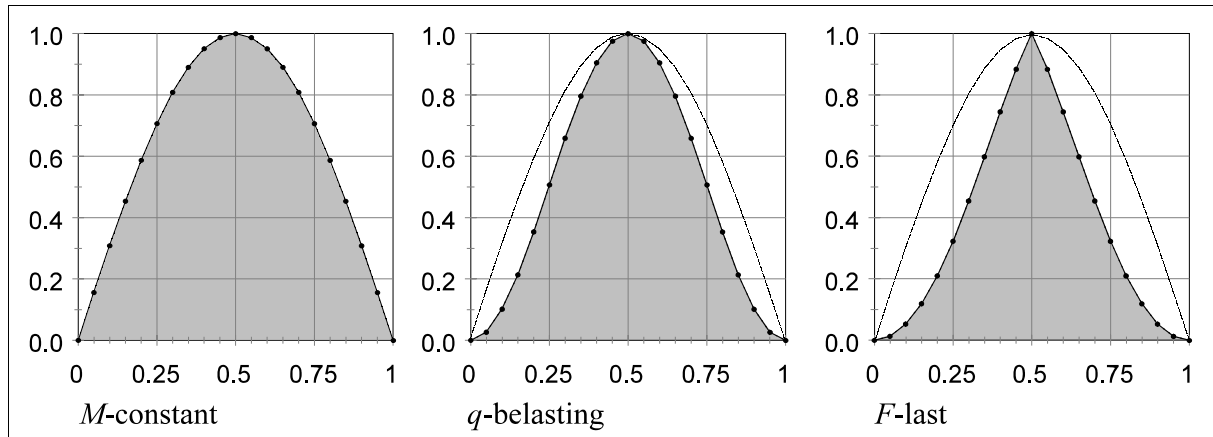
Hierin is: k_3 een nader te bepalen factor die afhankelijk is van de vorm van de M -lijn.

Bij een belasting door een constant moment M_{y1} is het verloop van v_2'' sinusvormig. Dat geldt dan ook voor M_{z2} en eveneens voor v_2 . In dat geval is de factor: $k_3 = 1$

Bij een gelijkmatig verdeelde belasting of een geconcentreerde last in het midden van de staaf zijn de uitbuigingen in de z -richting kleiner dan bij een constant moment M_y , hetgeen bij de berekening van n_z^* in rekening is gebracht door de factor: $k_1 < 1$.

Zoals bekend kan aan de vorm en het oppervlak van momentenlijnen de nodige informatie worden ontleend over de vervormingen en dat geldt dus ook omgekeerd.

Het verloop van de M_z -lijnen bij de genoemde belastinggevallen (ontleend aan de berekeningen van Hoofdstuk 5 en aldaar weergegeven in de figuren 5.10 en 5.18) is verzameld in figuur 8.2. Ter vergelijking is bij elke figuur een 'zuivere' sinuslijn getekend.



figuur 8.2

De bijbehorende doorbuigingen zijn berekend op respectievelijk:

$M_{y1} = \bar{M}_{y1} = \text{constant}$ hierbij is $M_{z2} = \text{sinusvormig}$ Dit geldt ook voor M_{z2} door een axiale drukkracht	$\bar{M}_{y1} = \frac{qL^2}{8}$ door gelijkmatig verdeelde q -last	$\bar{M}_{y1} = \frac{FL}{4}$ door F geconcentreerd in het midden van de staaf
$\bar{v}_2 = \frac{\bar{M}_{z2}L^2}{\pi^2 EI_z} = \frac{\bar{M}_{z2}}{F_{Ez}}$	$\bar{v}_2 = \frac{\bar{M}_{z2}L^2}{11,45EI_z} = \frac{0,86\bar{M}_{z2}}{F_{Ez}}$	$\bar{v}_2 = \frac{\bar{M}_{z2}L^2}{13,60EI_z} = \frac{0,73\bar{M}_{z2}}{F_{Ez}}$
Omgekeerd geldt, dat bij een bekende \bar{v}_2 er een moment \bar{M}_{z2} optreedt van:		
$\bar{M}_{z2} = F_{Ez}\bar{v}_2$	$\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez}}{0,86}\bar{v}_2$	$\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez}}{0,73}\bar{v}_2$

Dit is dus algemeen te formuleren als: $\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez}}{k_3}\bar{v}_2$ (8.13)

N.B. Omdat voor staven op twee steunpunten de factor k_3 (nagenoeg) overeenkomt met de eerder berekende factoren k_1 kan (8.13) desgewenst via:

$\bar{v}_2 = \frac{\bar{v}}{n_z^*}$ waarin: $\bar{v} = \bar{v}_0 \frac{n_z^*}{n_z^* - 1}$ worden vereenvoudigd tot:

$$\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez}}{k_1} \frac{\bar{v}_0}{n_z^* - 1} \quad (8.14)$$

Als de invloed van de axiale druk relatief groot is zal de M_{z2} -lijn meer een sinuslijn gaan benaderen (vergelijkbaar met de meest linkse M_{z2} -lijn in figuur 8.2. In dat geval zal de factor k_3 dicht bij een waarde 1 uitkomen. Interpolatie tussen de waarden: k_3 en 1 is denkbaar op basis van de verhouding tussen de invloeden van \bar{M}_{y1} en F_c .

Die verhouding is te vinden door de al eerder berekende waarde van n_z^* te splitsen in een 'momentcomponent' en een 'drukkracht'component:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kip}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} = \frac{1}{n_M^*} + \frac{1}{n_F^*} \quad (8.15)$$

In formulevorm betekent deze interpolatie: $k_{\text{geïnterpoleerd}} = n_z^* \left(\frac{k_1}{n_M^*} + \frac{1}{n_F^*} \right)$ (8.16)

Bij twijfel of deze extra moeite lonend is kan bedacht worden dat eenvoudig toepassen van: $k_3 = k_1$ in ieder geval altijd veilig is.

Berekening van de torsiemomenten en de flensbuigingsmomenten

Het maximale torsiemoment treedt op bij de steunpunten en kan direct worden berekend uit de belasting en de vorm van de uitbuigingslijn:

De v -lijn is (nagenoeg) sinusvormig (zie figuren 5.5 en 5.13) en de torsielijn is dus (nagenoeg) cosinusvormig. Daaruit is direct af te leiden (zie figuur 8.3) dat het maximale torsiemoment bij de oplegpunten is:

-voor een constant moment: $\bar{M}_t = \bar{M}_{y1} v'_{x=0} = \frac{\pi \bar{M}_{y1} \bar{v}}{L}$ (8.17a)

-voor een q -belasting: $\bar{M}_t = \frac{qL}{2} (v_{gem} - e \varphi_{gem}) = \frac{8 \bar{M}_{y1} \bar{v}}{\pi} \left(1 - e \frac{\bar{\varphi}}{\bar{v}} \right)$ (8.17b)

-voor een F -last in het midden: $\bar{M}_t = \frac{F}{2} (\bar{v} - e \bar{\varphi}) = \frac{2 \bar{M}_{y1} \bar{v}}{L} \left(1 - e \frac{\bar{\varphi}}{\bar{v}} \right)$ (8.17c)

Uit (5.29), respectievelijk (5.42) en de daarop volgende uitwerkingen is af te leiden:

$$\frac{\bar{\varphi}}{\bar{v}} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1}}{GI_t + k_2 \bar{M}_{y1} e} \quad (8.18)$$

Toepassing van de momentcomponent in de standaardformule voor de bepaling van n_z^* :

$$\frac{1}{n_{zM}^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kip}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{F_{Ez} (GI_t + k_2 \bar{M}_{y1} e)} \quad (8.19)$$

resulteert daarmee in:

$$\frac{\bar{\varphi}}{\bar{v}} = \frac{F_{Ez}}{k_1 \bar{M}_{y1} n_{zM}^*} \quad (8.20)$$

Daardoor zijn de vergelijkingen (8.17a), (8.17b) en (8.17c) algemeen te schrijven als:

$$\bar{M}_t = k_5 \left(\bar{M}_{y1} - \frac{F_{Ez} e}{k_1 n_{zM}^*} \right) \frac{\bar{v}}{L} \quad (8.21)$$

Hierin zijn k_1 en k_5 factoren die afhankelijk zijn van het staaftype en de belasting.
Zie de tabel:

belasting	k_1	k_5
constant moment	1,00	3,14
gelijkmatig verdeeld	0,88	2,55
geconcentreerd in het staafmidden	0,73	2,00

Het torsiemoment is samengesteld uit twee componenten: 'zuivere' torsie en verhinderde welving (zie Bijlage 3) :

$$M_t = M_{tor} + M_{tw} = \frac{\bar{M}_t}{1 + C_{tw}} + \frac{\bar{M}_t C_{tw}}{1 + C_{tw}} \quad (8.22)$$

Desgewenst kan met M_{tor} de torsiespanning (schuifspanning) worden berekend met:

$$\bar{\tau}_{tor} = \frac{\bar{M}_{tor}}{W_{tor}} \quad (8.23)$$

Voor de bepaling van het hiervoor benodigde torsieweerstandsmoment zie (B3.03) en (B3.05).

De welvingscomponent M_{tw} (die bestaat uit een koppel van twee flensreacties) veroorzaakt geen rechtstreekse buig- of schuifspanningen en kan nu verder buiten beschouwing blijven. Maar het is wel nuttig om de in de flenzen optredende buigende momenten en buigspanningen nader te controleren omdat de maximale flensbuigingsmomenten optreden (bij staven op twee steunpunten) in het midden van de staaf waar M_{y1} en M_{z2} beide maximaal zijn. Met (B3.08) en volgende kan nu worden berekend:

$$\bar{M}_{z2;fl} = -\frac{EI_z}{2} \frac{h}{2} \bar{\varphi}'' = \frac{EI_z h \pi^2}{4 L^2} \bar{\varphi} = \frac{F_{Ez} h}{4} \bar{\varphi} \quad (8.24)$$

Dit moment moet worden opgenomen door: $W_{flz} = 0,5 W_z$ en omdat in het zelfde punt ook de momenten M_{ty1} en M_{tz2} maximaal zijn is het voor de hand liggend om $M_{z2;fl}$ te beschouwen als een 'toeslag' op M_z , die met (8.12), (8.13) en (8.20) is te schrijven als:

$$\frac{\bar{M}_{z2;fl}}{\bar{M}_{z2}} = \frac{k_3 F_{Ez} h}{4 k_1 \bar{M}_{y1}} \frac{n_z^*}{n_{zM}^*} = \frac{F_{Ez} h}{4 \bar{M}_{y1}} \frac{n_z^*}{n_{zM}^*} \quad (8.25)$$

- N.B. 1. Omdat voor staven op twee steunpunten factor k_3 (nagenoeg) overeenkomt met k_1 kunnen beide factoren in (8.25) tegen elkaar wegvallen.
 2. Bij een kleine waarde van M_{y1} (in de noemer) wordt de 'toeslag' op M_z weliswaar relatief groot, maar omdat daarbij M_{z2} ook klein is blijft $M_{z2;fl}$ eveneens klein.

Het totale moment M_z

Als er eventueel een zijdelingse belasting in de 'zwakke' richting zou optreden ontstaat er een extra 2^{de}-orde effect dat eenvoudig op de uitkomst van (8.1) kan worden gesuperponeerd:

$$\bar{M}_{z; \text{door zijdelingse belasting}} = \bar{M}_{z1} \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} \quad (8.26)$$

N.B. De factor n_z^* wordt niet beïnvloed door de grootte of het verloop van M_{z2} .

Uiteindelijk kan \bar{M}_z in het midden van de staaf dus bestaan uit drie componenten:

Een eventueel 1 ^{ste} -orde moment door een belasting in de y-richting met de hierbij behorende 2 ^{de} -orde component, totaal:	$\bar{M}_{z1+2} = \bar{M}_{z1} \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} \quad (8.27)$
Altijd een 2 ^{de} -orde component: zie (8.14)	$\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez}}{k_1} \frac{\bar{v}_0}{n_z^* - 1} \quad (8.28)$
Een 2 ^{de} -orde component uit de flensbuiging: zie (8.25) N.B. op te nemen door: $W_{flz} = 0,5 W_z$	$\bar{M}_{z2;fl} = \frac{F_{Ez} h}{4 \bar{M}_{y1}} \frac{n_z^*}{n_{zM}^*} \bar{M}_{z2} \quad (8.29)$

Als de uitkomsten van (8.27) tot en met (8.29) in toetsformule (8.01) worden ingevoerd zijn alle benodigde componenten beschikbaar:

- De uitwendige krachten en momenten volgen uit het evenwicht,
- De geometrische gegevens en sterkte van de doorsneden volgen uit de sterkteleer,
- De knikkraft volgt uit de formule van Euler,
- De initiële excentriciteit volgt uit de aard van het materiaal of uit betreffende normen,
- De term n_z^* volgt uit de ontwikkelde formules in Hoofdstuk 5 (of 6)

Hoewel het verleidelijk is de voorgaande formules te combineren wordt dit vanwege de overzichtelijkheid achterwege gelaten. Vooral het expliciet bepalen van de term n_z^* is zeer gewenst om goed inzicht te verkrijgen in het 2^{de}-orde gedrag van de constructie.

8.2.2 Staven op twee steunpunten met inklemmingen

Aangenomen wordt dat inklemmingen die welving (geheel) kunnen verhinderen ook in staat zijn om een inklemmingsmoment $M_{y1;steunpunt}$ te leveren dat kan worden ontleend aan een staticaberekening. In de algemene formule voor de berekening van de term n_z^* volgens (8.03) kan dit eenvoudig worden ingevoerd:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{\left(-M_{y1;steunpunt} + k_1 \bar{M}_{y1;belasting}\right)^2}{M_{kip}^2 + k_2 \bar{M}_{y1;belasting} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (8.30)$$

Door dit steunpuntsmoment wordt de teller (aanzienlijk) verkleind en kan zelfs nul worden. Om te voorkomen dat dan de kipstabiliteit geheel verwaarloosd zou worden is het veilig om minimaal het resterende veldmoment in rekening te brengen in combinatie met de bijbehorende factor(en) k_1 . Bij oneindig stijve inklemmingen betekent dat:

$$\bar{M}_{veld} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) qL^2 = \frac{1}{24} qL^2 \quad \text{respectievelijk} \quad \bar{M}_{veld} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) FL = \frac{1}{8} FL$$

De momentcomponent in de noemer heeft uitsluitend betrekking op de excentriciteit van de belasting, zodat daarin het inklemmingsmoment niet voorkomt.

Uit (B3.49) volgt dat (bij de bepaling van het kipmoment) als effectieve torsiestijfheid in rekening kan worden gebracht:

$$GI_t = GI_{tor} (1 + k_4 C_{tw}) \quad \text{waarin: } k_4 = 5,5 \quad (8.31)$$

Ondanks dat het verhinderen van de welving bij de steunpunten ook kan inhouden dat de rotatie (v') aldaar geheel of gedeeltelijk wordt belemmerd is het veilig om te rekenen met dezelfde Eulerse kniksterkte (8.05) en ook met hetzelfde maximale torsiemoment als bij staven met gaffelopleggingen volgens (8.21).

De gunstige werking van de inklemming wordt in rekening gebracht door een vergroting van de torsiestijfheid volgens (8.31), waarbij is aangenomen dat de rotatielijn en de uitbuigingslijn

beide sinusvormig blijven. Daardoor blijven de verhoudingen van het totale torsiemoment (en dus ook de som van de flensbuigingsmomenten) tot de maximale uitbuiging dezelfde als bij een gaffeloplegging.

Aan (B3.51b) is te ontlenu dat de som van flensbuigingsmomenten kan worden verdeeld over:

- ingeklemd steunpunt: 1/3 deel
- het midden van de staaf: 2/3 deel.

Dus met (8.29) betekent dat:

- bij de inklemmingen:
$$\bar{M}_{z2;fl} = -\frac{F_{Ez} h}{6k_1^2 \bar{M}_{y1}} \frac{n_z^*}{n_{zM}^*} \bar{M}_z \tag{8.32}$$

- in het midden van de staaf:
$$\bar{M}_{z2;fl} = \frac{F_{Ez} h}{12k_1^2 \bar{M}_{y1}} \frac{n_z^*}{n_{zM}^*} \bar{M}_z \tag{8.33}$$

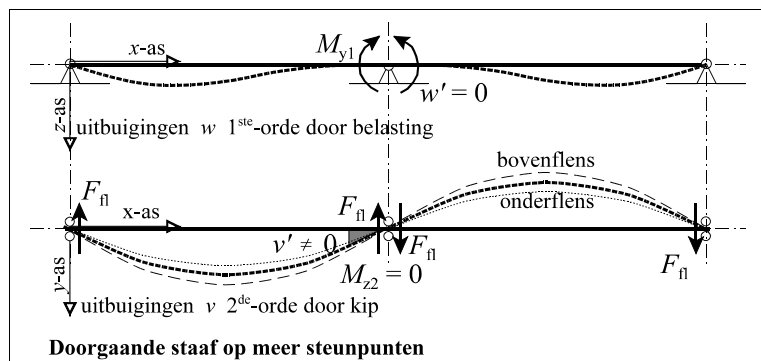
Deze momenten moeten worden opgenomen door: $W_{\Omega z} = 0,5 W_z$ zodat beide zijn te superponeren als een toeslag op \bar{M}_{z2} . Bij de inklemming, waar $\varphi = 0$ geldt (bij afwezigheid van een 1^{ste}-orde belasting in de y-richting) dus ook: $M_{z2} = 0$. Maar vanwege de grote waarde van M_{y1} is superpositie van (8.32) in (8.01) toch nodig. In het midden van de staaf geldt de procedure volgens (8.27), (8.28) en (8.33).

De tekens voor de berekening van de maximale spanningen zijn verder niet van belang omdat in elke flens zowel buigdruk- als buigtrekspanningen voorkomen, zodat kan worden volstaan met het berekenen van de absolute waarden.

Voor de (eventuele) berekening van de 'zuivere' torsiespanningen zie (8.22) en van zijdelingse belasting zie (8.27).

8.2.3 Doorgaande staven op meer steunpunten

Van twee aansluitende velden kunnen de uitbuigingen in de ongesteunde 'zwakke' richting en rotaties antisymmetrisch zijn. Daardoor kunnen in de aansluitende staven de uitbuigingen v en de rotaties φ tegengesteld zijn Zie figuur 8.3.



figuur 8.3

Het tussensteunpunt kan daardoor geen rotatie om de z -as verhinderen en functioneert dus als een gaffel. Het vervormingsgedrag van het stelsel is wat betreft kip en knik geheel gelijk aan dat van een staaf op twee steunpunten met gaffels.

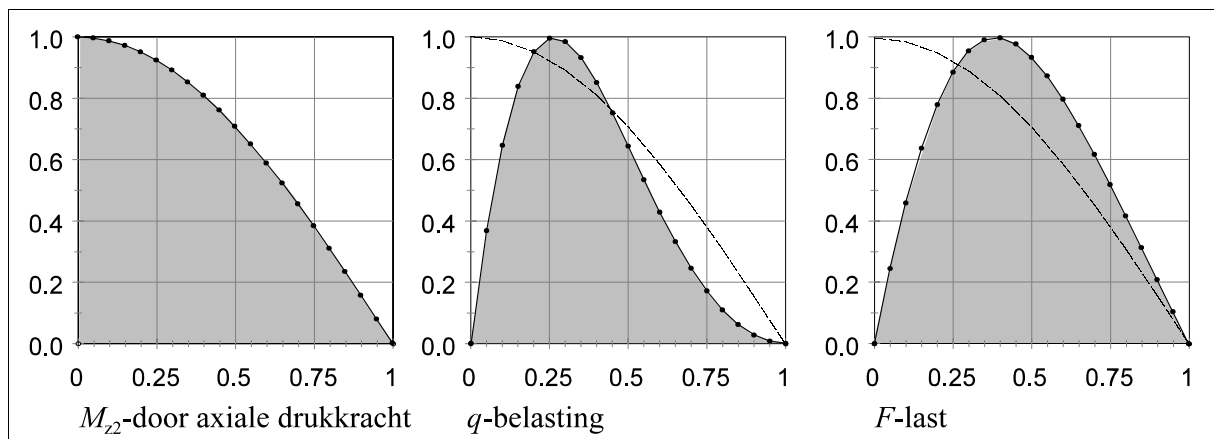
Bij alle steunpunten geldt dus: $M_{z2} = M_{\phi} = 0$. Bij een tussensteunpunt ontstaat doorgaans een (groot) inklemmingsmoment M_{y1} , wat overigens een gunstig effect heeft op de kipstabiliteit. Zie (8.30). Doorgaande staven zijn dus te beschouwen als staven op twee steunpunten met gaffelopleggingen. De verdere berekening kan worden uitgevoerd volgens Hoofdstuk 8.2.1.

8.2.4 Uitkragingen

Bij uitkragingen treedt het maximale moment \bar{M}_{y1} op bij de inklemming en het maximale moment \bar{M}_{z2} meestal iets verderop in het veld, afhankelijk van de belasting. Belangrijker is echter de plaats waar de som van de buigspanningen maximaal is. Voor de twee behandelde belastinggevallen kan deze plaats worden gevonden door het maximum te zoeken van:

$$\sigma_{my1} + \sigma_{mz2} = \frac{M_{y1}}{W_y} + \frac{M_{z2}}{W_z} \quad (8.34)$$

Het verloop van de M_z -lijnen bij de beschouwde belastinggevallen (zoals ontleend aan de berekeningen van Hoofdstuk 5 en aldaar weergegeven in de figuren 5.8 en 5.16) is verzameld in figuur 8.4:



figuur 8.4

Evenals bij staven op twee steunpunten kunnen nu de relaties tussen momenten en uitbuigingen worden verzameld in een overzicht:

M_{z2} = cosinusvormig door axiale drukkracht F_c	$\bar{M}_{y1} = -0,5qL^2$ door q -last	$\bar{M}_{y1} = -FL$ door F_z op het staafeind
maximum bij: $x = 0$	maximum bij: $x/L = 0,25$	maximum bij: $x/L = 0,4$
$\bar{v}_2 = \frac{\bar{M}_{z2}L^2}{0,25\pi^2 EI_z} = \frac{\bar{M}_{z2}}{F_{Ez}}$	$\bar{v}_2 = \frac{\bar{M}_{z2}L^2}{3,13EI_z} = \frac{0,79\bar{M}_{z2}}{F_{Ez}}$	$\bar{v}_2 = \frac{\bar{M}_{z2}L^2}{2,91EI_z} = \frac{0,85\bar{M}_{z2}}{F_{Ez}}$
Omgekeerd geldt, dat bij een bekende \bar{v}_2 er een moment \bar{M}_{z2} optreedt van:		
$\bar{M}_{z2} = F_{Ez}\bar{v}_2$	$\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez}}{0,79}\bar{v}_2$	$\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez}}{0,85}\bar{v}_2$

Hierin is de Eulerse knikkracht voor een uitkraging:

$$F_{Ez} = \frac{\pi^2 EI_2}{(2L)^2} \quad (8.35)$$

Het 2^{de}-orde moment is dus algemeen te formuleren als:

$$\boxed{\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez}}{k_3}\bar{v}_2} \quad (8.36)$$

Anders dan bij staven op twee steunpunten is er bij uitkragingen geen duidelijk verband te ontdekken tussen k_3 en de eerder berekende factor k_1 maar de verschillen zijn kleiner.

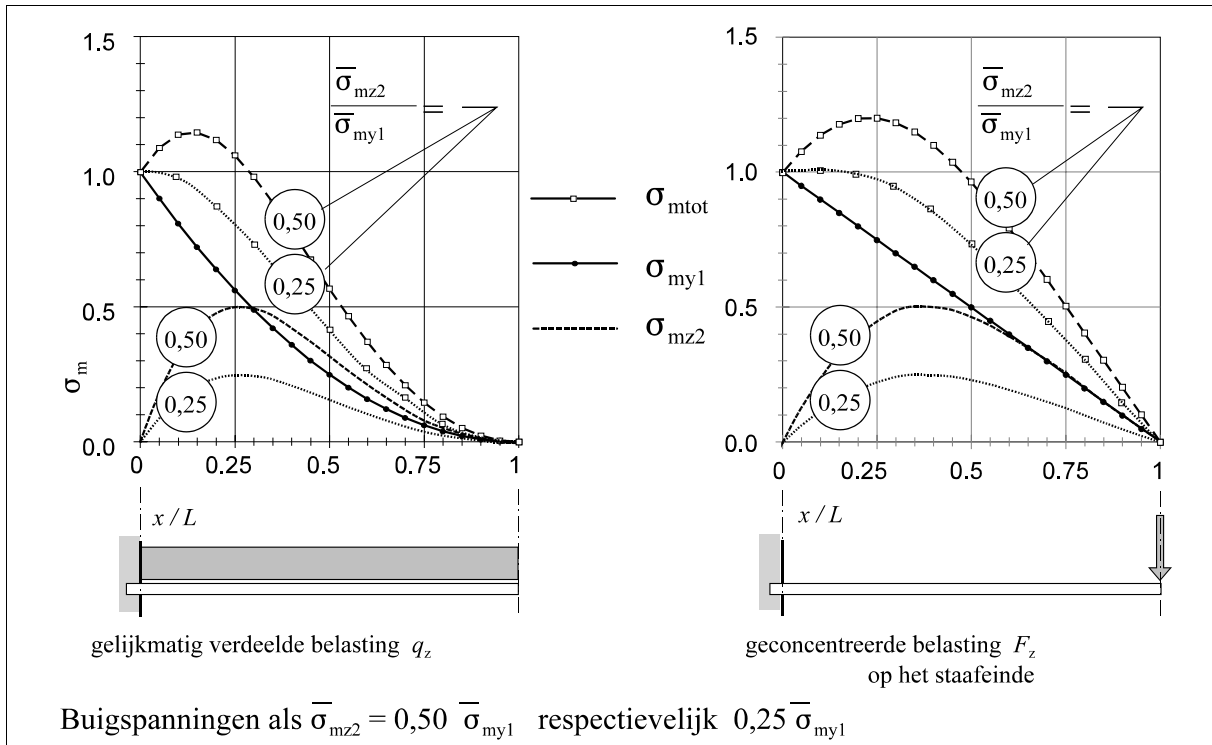
De maximale momenten \bar{M}_{y1} en \bar{M}_{z2} en de daaruit volgende buigspanningen en de maximale som van beiden treden op in verschillende doorsneden, zoals is weergegeven in figuur 8.5:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{my1} & \text{ treedt altijd op bij:} & x = 0 \\ \bar{\sigma}_{mz2} & \text{ treedt op (afhankelijk van het belastinggeval) bij:} & x = 0,25 \text{ à } 0,40 L \end{aligned}$$

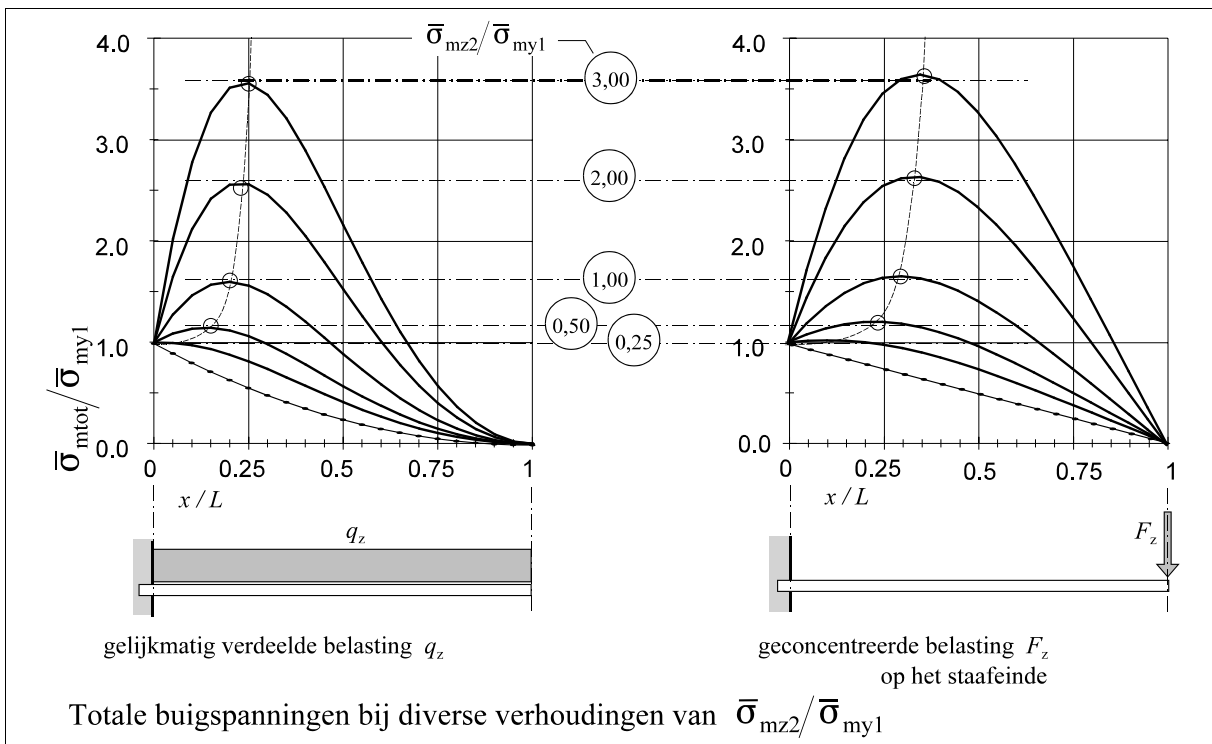
Zolang: $\bar{\sigma}_{mz2} < 0,25\bar{\sigma}_{my1}$ treedt de maximale totale buigspanning op bij: $x = 0$ en heeft $\bar{\sigma}_{mz2}$ geen invloed op de maximale buigspanning.

Als: $\bar{\sigma}_{mz2} > 0,25\bar{\sigma}_{my1}$ treedt de maximale totale buigspanning op een kleine afstand naast de inklemming en daar moeten de buigspanningen dus gesuperponeerd worden.

Voor enkele verhoudingen tussen $\bar{\sigma}_{mz2}$ en $\bar{\sigma}_{my1}$ is het resultaat van de maximale spanning en de plaats waar deze optreedt weergegeven in figuur 8.6:



figuur 8.5



figuur 8.6

Wat betreft de grootte van de maximale buigspanning blijken er nauwelijks verschillen te zijn tussen de twee beschouwde belastinggevallen. Bij een q -belasting treden deze iets dichterbij het steunpunt en zijn ze ca. 4 % kleiner dan bij een F -last.

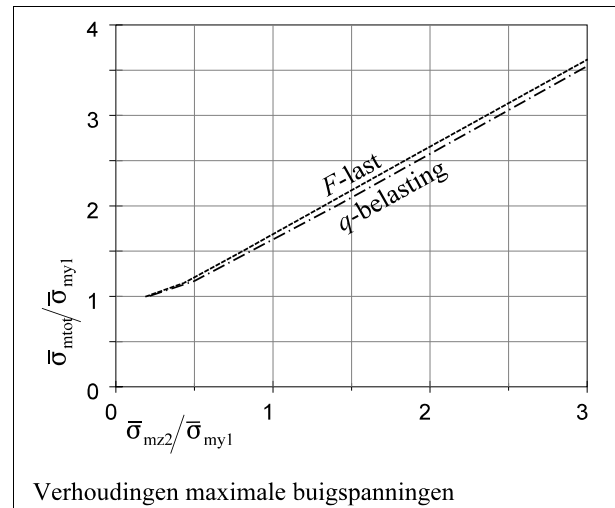
De relatie tussen de grootte van de maximale buigspanningen in beide richtingen $\bar{\sigma}_{mz2}$ en $\bar{\sigma}_{my1}$ is weergegeven in figuur 8.7.

horizontaal:

$$\text{- de verhouding: } \frac{\bar{\sigma}_{mz2}}{\bar{\sigma}_{my1}}$$

verticaal:

$$\text{- de verhouding: } \frac{\bar{\sigma}_{m,tot}}{\bar{\sigma}_{my1}} = \frac{\bar{\sigma}_{my1} + \bar{\sigma}_{mz2}}{\bar{\sigma}_{my1}}$$



figuur 8.7

Vanwege de zeer kleine verschillen is het verantwoord om een gemiddelde waarde te kiezen, zodat voor beide belastinggevallen kan worden volstaan met slechts één benaderingsformule:

$$\bar{\sigma}_{m,tot} = 0,69\bar{\sigma}_{my1} + 0,96\bar{\sigma}_{mz2} \quad (8.37)$$

$$\text{Met (8.36) is dan te berekenen: } \bar{\sigma}_{mz,tot} = 0,69 \frac{\bar{M}_{y1}}{W_y} + \frac{0,96}{0,79 \text{ respectievelijk } 0,85} \frac{F_{Ez} \bar{v}_2}{W_z} \quad (8.38)$$

af te ronden tot:

$$\bar{\sigma}_{mz,tot} = 0,7 \frac{\bar{M}_{y1}}{W_y} + 1,2 \frac{F_{Ez} \bar{v}_2}{W_z} \quad (8.39)$$

N.B. Bedacht moet worden dat het moment M_{y1} bij uitkragingen in de gebruikelijke notaties negatief is, maar dat altijd in twee punten (diagonaal tegenover elkaar in de uiterste hoeken van de doorsnede) de superpositie van spanningen een uiterste waarde oplevert.

Om te voorkomen dat bij kleine waarden van \bar{M}_{z2} de totale spanning kleiner wordt dan $\bar{\sigma}_{my1}$ moet hierop apart worden getoetst. Zie aan het eind van deze paragraaf waar ook de flensbuigingsmomenten in rekening worden gebracht.

Bij een relatief grote invloed van de axiale druk, zal de M_{z2} -lijn meer een cosinuslijn gaan benaderen (vergelijkbaar met de meest linkse M_{z2} -lijn in figuur 8.4. In dat geval zal de factor k_3 dichter tot de waarde 1 naderen en zal de maximale buigspanning dichter bij de inklemming optreden.

Als er overwegend een axiale drukkracht optreedt is dit in principe te benaderen als een tweedimensionale knikberekening waarbij: $k_3 = 1$.

Bij een eventuele combinatie van een zijdelingse belasting en een axiale drukkracht kan (evenals bij staven op twee steunpunten) worden geïnterpoleerd tussen de betreffende waarden van k_3 naar verhouding van de twee componenten van n_z^* volgens (8.07) en (8.08).

Berekening van de torsiemomenten en de flensbuigingsmomenten

Het maximale torsiemoment treedt op bij de inklemming en kan direct worden berekend uit de belasting en de vorm van de uitbuigingslijn volgens figuur 5.24 en de rotatielijnen volgens de figuren 5.27 en 5.34. Daaruit is direct af te leiden:

$$\text{-voor een } q\text{-belasting: } \bar{M}_t = qL(v_{gem} - e\bar{\varphi}_{gem}) = \frac{2\bar{M}_{y1}\bar{v}}{L} \left(0,3 - 0,74 \frac{\bar{\varphi}}{\bar{v}} \right) \quad (8.40a)$$

$$\text{-voor een } F\text{-last: } \bar{M}_t = F(\bar{v} - e\bar{\varphi}) = \frac{\bar{M}_{y1}\bar{v}}{L} \left(1 - e \frac{\bar{\varphi}}{\bar{v}} \right) \quad (8.40b)$$

Vergelijkbaar met de berekening bij staven op twee steunpunten - zie (8.18) tot (8.21) - is uit (5.64), respectievelijk (5.77) en de daarop volgende uitwerkingen af te leiden:

$$\frac{\bar{\varphi}}{\bar{v}} = \frac{F_{Ez}}{k_1 \bar{M}_{y1} n_{zM}^*} \quad (8.40)$$

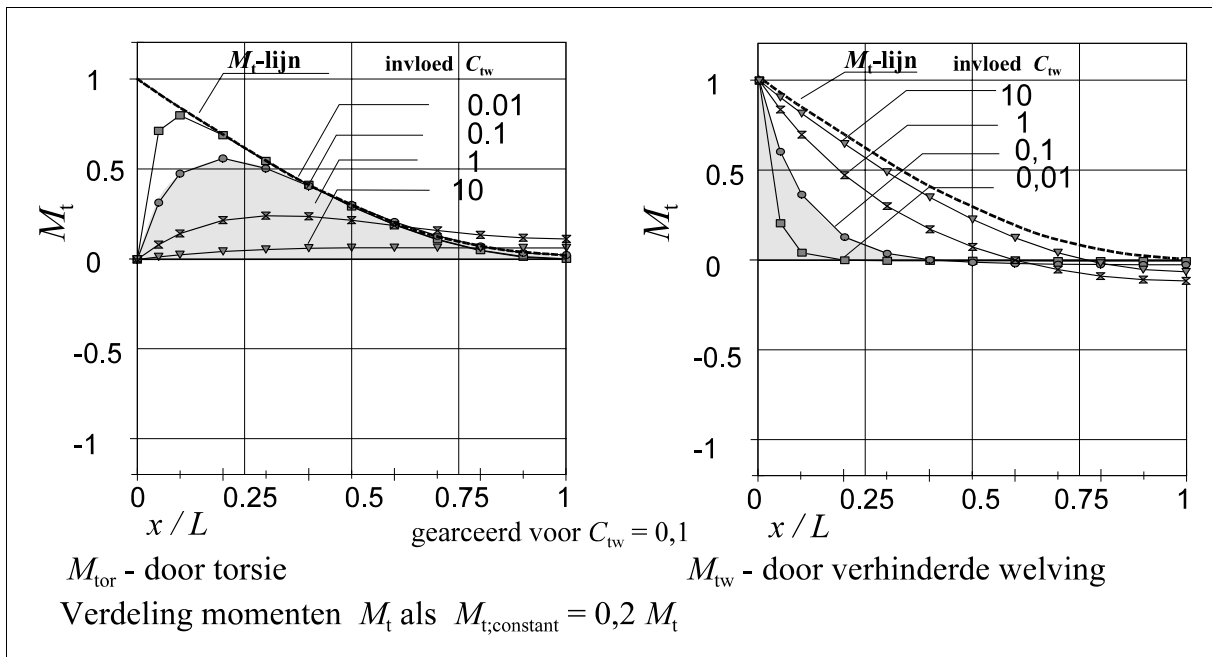
Daardoor zijn de vergelijkingen (8.39a) en (8.39b) algemeen te schrijven als

$$\bar{M}_t = \frac{k_5 \bar{v}}{L} \left(\bar{M}_{y1} - \frac{k_6 F_{Ez} e}{k_1 n_{zM}^*} \right) \quad (8.41)$$

Hierin zijn k_1 , k_5 en k_6 factoren die afhankelijk zijn van het staaftype en de belasting. Zie de tabel:

belasting	k_1	k_5	k_6
gelijkmatig verdeeld	0,24	0,6	2,5
geconcentreerd in het staafeind	0,41	1,0	1,0

Voor de verdeling van het totale torsiemoment over M_{tor} en M_{tw} wordt (voor een belasting F op het eind van de uitkraging die aangrijpt in het midden van de doorsnede met $e = 0$) hier uit Bijlage 3 het gemiddelde van de figuren B3.22 en B3.23 overgenomen als figuur 8.8:



figuur 8.8

In Bijlage 3 is afgeleid dat bij de gebruikelijke I-profielen de waarde van C_{tw} groter is dan 0,1. De 'zuivere' torsiemomenten zijn dan altijd kleiner dan is aangegeven door het geaccentueerde gebied in de linker grafiek en de welvingscomponent is dus groter dan aangegeven door het geaccentueerde gebied in de rechter grafiek.

Het maximale 'zuivere' torsiemoment treedt op in een gebied van: $0,2 < x/L < 1$ en de bijbehorende torsiespanning (schuifspanning) is voldoende nauwkeurig te benaderen met:

$$\bar{\tau}_{tor} = \frac{\bar{M}_{tor}}{W_{tor}} \approx 0,5 \frac{\bar{M}_t}{W_{tor}} \frac{1}{1 + C_{tw}} \quad (8.42)$$

Voor de bepaling van het hiervoor benodigde torsieweerstandsmoment zie (B3.03) en (B3.05).

De component M_{tw} wordt geleverd door een koppel van twee flensreacties die in beide flenzen een flensbuigingsmoment veroorzaken waarvan het maximum optreedt bij de inklemming waar bij een uitkraging φ'' maximaal is. Uit (B3.08) en volgende kan nu worden afgeleid:

$$\bar{M}_{z2,fl} = -\frac{EI_z}{2} \frac{h}{2} \bar{\varphi}'' \quad (8.43)$$

Bij uitkragingen is er niet zo'n duidelijke vormverwantschap tussen φ'' en φ als bij staven op twee steunpunten. Vergelijk het verloop van de rotatie in figuur B3.20 met de 2^{de} afgeleide daarvan in figuur B3.24. Gebruik makend van de voor deze grafieken gemaakte berekeningen

is het echter goed mogelijk daaruit ook de verhouding tussen $\bar{\varphi}''$ (bij het steunpunt) en $\bar{\varphi}$ (bij het staafeind) te bepalen. De resultaten zijn weergegeven in figuur 8.8. De resultaten zijn weergegeven in figuur 8.8.

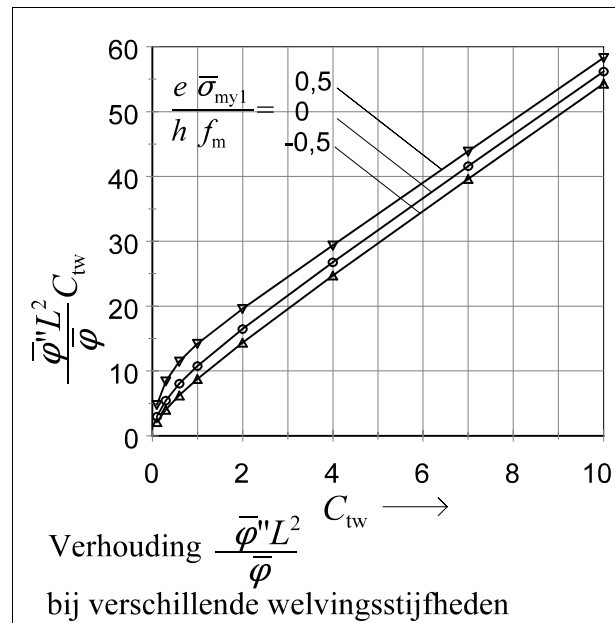
op de horizontale as:

- olopende waarden van: C_{tw}

op de verticale as:

- de bijbehorende verhouding: $\frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}} L^2 C_{tw}$

Hierin is ook verwerkt de invloed van de excentriciteit van het aangrijpingspunt van de belasting ten opzichte van de hoogte van de doorsnede en de maximale buigspanning $\bar{\sigma}_{my1}$ bij de inklemming ten opzichte van de buigsterkte.



figuur 8.8

N.B. Bij een positieve (gunstige) excentriciteit is het constante deel van de M_t -lijn negatief (zie figuur B3.23). De maximale rotatie treedt dan niet op bij het staafeind maar op enige afstand daarvan waar $M_t = \varphi' = 0$. De rotatie van het staafeind neemt dan relatief meer af dan de 2^{de} afgeleide daarvan bij de inklemming zodat hun verhouding daardoor (iets) groter wordt dan bij een negatieve excentriciteit.

De verschillende uitkomsten bij de praktisch mogelijke excentriciteiten en maximale spanningen zijn niet groot zodat het verantwoord is ze hier niet in rekening te brengen. Het gezochte verband is dan goed te benaderen met:

$$\frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}} L^2 C_{tw} = 7 + 5C_{tw} \tag{8.44}$$

Ingevuld in (8.43) levert dit:

$$\bar{M}_{fl} = -\frac{EI_z}{4} \frac{h}{L^2} \left(\frac{7}{C_{tw}} + 5 \right) \bar{\varphi} = -5 \frac{F_{Ez} h}{\pi^2} \frac{\bar{\varphi}}{\bar{v}} \left(\frac{1,4}{C_{tw}} + 1 \right) \bar{v} \tag{8.45}$$

Evenals bij staven op twee steunpunten is ook hier M_{fl} te beschouwen als een 'toeslag' op M_z die met (8.36) en (8.41) kan worden geschreven als:

$$\frac{\bar{M}_{z2,fl}}{\bar{M}_{z2}} = -\frac{k_3 F_{Ez} h}{2k_1 \bar{M}_{y1}} \frac{n_z^*}{n_{zM}^*} \left(\frac{1,4}{C_{tw}} + 1 \right) \quad (8.46)$$

Dit moment moet worden opgenomen door: $W_{flz} = 0,5 W_z$. Omdat het optreedt bij de inklemming moet de hieruit volgende buigspanning $\bar{\sigma}_{mz,fl}$ worden gesuperponeerd op $\bar{\sigma}_{my1}$.

In het verdere verloop van de staaf neemt M_{fl} ongeveer even snel af als M_{y1} (zie figuur B3.24) en daarom is superpositie op M_{z2} niet zinvol.

Het totale moment M_z

Als er eventueel een zijdelingse belasting in de 'zwakke' richting zou optreden ontstaat er een extra 2^{de}-orde effect dat eenvoudig op de uitkomst van (8.01) kan worden gesuperponeerd:

$$\bar{M}_{z;\text{door zijdelingse belasting}} = \bar{M}_{z1} \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} \quad (8.47)$$

N.B. De term n_z^* wordt niet beïnvloed door de grootte of het verloop van M_{z2} .

Uiteindelijk kan \bar{M}_z dus bestaan uit drie componenten die niet op dezelfde plaats optreden:

Een eventueel 1 ^{ste} -orde moment door een belasting in de y-richting met de hierbij behorende 2 ^{de} -orde component, treedt op bij $x = 0$:	$\bar{M}_{z1+2} = \bar{M}_{z1} \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} \quad (8.48)$
Altijd een 2 ^{de} -orde component: zie (8.38) treedt op bij: $0,25L < x < 0,4L$ N.B. te combineren met: $0,7\bar{M}_{y1}$	$\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez}}{k_3} \frac{\bar{v}_0}{n_z^* - 1} \quad (8.49)$
Alleen bij I-profielen een 2 ^{de} -orde moment door flensbuiging: treedt op bij $x = 0$. Zie (8.47) N.B. op te nemen door: $W_{flz} = 0,5 W_z$	$\bar{M}_{z2,fl} = -\frac{k_7 F_{Ez} h}{2\bar{M}_{y1}} \frac{n_z^*}{n_{zM}^*} \bar{M}_{z2} \quad (8.50)$ $\text{hierin is: } k_7 = \frac{k_3}{k_1} \left(\frac{1,4}{C_{tw}} + 1 \right) \quad (8.51)$

Omdat de maxima van M_{y1} en M_{y1} op verschillende plaatsen optreden is het nodig om te toetsen volgens twee criteria:

met 2 ^{de} -orde moment M_{z2} volgens (8.49):	$\frac{F_c}{F_u} + 0,7 \frac{\bar{M}_y}{M_{uy}} + \frac{\bar{M}_{z2}}{M_{uz}} \leq 1 \quad (8.52)$
met 2 ^{de} -orde moment $M_{z2;fl}$ volgens (8.50):	$\frac{F_c}{F_u} + \frac{\bar{M}_y}{M_{uy}} + \frac{\bar{M}_{z2;fl}}{0,5M_{uz}} \leq 1 \quad (8.53)$

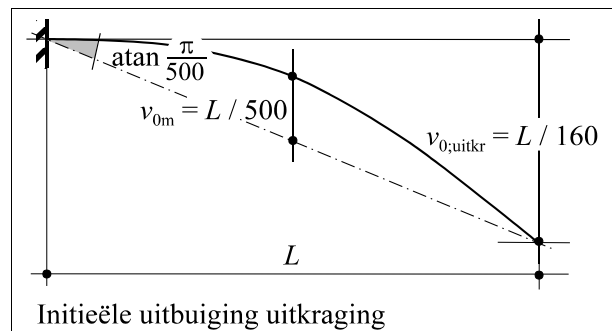
De initiële vervorming van een uitkraging

Omdat de uiteindelijke vervormingen (mede) afhankelijk zijn van de in rekening te brengen initiële uitbuiging v_0 is het belangrijk hiervoor een aanname te kiezen die gebaseerd is op de materiaaleigenschappen en /of de van toepassing zijnde normen. Het is daarbij voor de hand liggend dezelfde uitgangspunten te kiezen als voor tweezijdig opgelegde staven (met sinusvormige uitbuigingen) met een 'topwaarde' in het midden: $\bar{v}_{0m} = k_{v0}L$

Voor een uitkraging is de initiële verplaatsing van het vrije eind dan te ontleen aan figuur 8.8 en te berekenen op:

$$\bar{v}_{0;uitkraging} = \pi k_{v0}L \quad (8.54)$$

Bijvoorbeeld: als: $k_{v0} = 1/500$
wordt: $\pi k_{v0} = 1/160$



figuur 8.10

8.3 Toetsen van de stijfheid in de BGT

Hoewel in de bruikbaarheidsgrenstoestand de belastingen, spanningen en 2^{de}-orde effecten (veel) kleiner zijn dan in de uiterste grenstoestand kunnen toch dezelfde formules worden gebruikt.

De toelaatbare vervorming kan worden ontleend aan:

- de van toepassing zijnde normen, zoals NEN 6702 TGB 1990 Belastingen en vervormingen [42a],
- nadere eisen:
 - voortvloeiend uit de aard van de constructie,
 - naar aanleiding van bijzondere omstandigheden.

De norm NEN 6702 maakt onderscheid tussen:

1. onmiddellijk optredende vervormingen:	door de permanente belasting op de constructie
2. bijkomende vervormingen:	door variabele belastingen en door kruip
3. eindvervormingen (zakking):	totale vervorming minus een eventuele zeeg

Aan 2. en 3. worden eisen gesteld afhankelijk van de toepassing van de constructie. In Vuistregels [35] is afgeleid dat bij toepassing van NEN 6702 de eindvervorming meestal maatgevend is, behalve bij betrekkelijk lichte houten vloeren.

Bedacht moet worden dat de geformuleerde eisen betrekking hebben op de uitbuigingen in de richting van de belasting, dus in het algemeen de 'sterke' richting. Inclusief 2^{de}-orde effecten is dit te berekenen met behulp van n_y^* via een eenvoudige procedure in drie stappen:

1. Berekening van de term n_y^* (die uitsluitend wordt beïnvloed door een axiale drukkracht en niet door kipeffecten):	$\frac{1}{n_y^*} = \frac{F_c}{F_{Ey}} \quad (8.55)$
2. Vervolgens berekening van de maatgevende uitbuiging met:	$\bar{w} = (\bar{w}_0 + \bar{w}_1) \frac{n_y^*}{n_y^* - 1} + \text{kruipeffecten} \quad (8.56)$
3. Tenslotte toetsen met:	$\bar{w} \leq w_{\text{toelaatbaar}} = \text{meestal } 0,004 L \quad (8.57)$

Het is niet geheel duidelijk welke initiële vervorming w_0 in rekening moet worden gebracht. Bij sterkteberekeningen in de UGT wordt hiervoor uitgegaan van een vrij grote vervorming die (waarschijnlijk) is op te vatten als een statistische 5% bovengrens van een partij staven van een bepaalde kwaliteitsklasse. Bij doorbuigingsberekeningen wordt meestal niet uitgegaan van de vervorming van een enkel afzonderlijk element, maar van de gemiddelde uitkomst van het totale aantal toegepaste elementen. Zie bijvoorbeeld de verschillende E -moduli die bij houtconstructies in rekening worden gebracht als E_u (in de UGT) en E_{ser} (in de BGT)

Wanneer (enigszins) kromme staven 'om en om' worden aangebracht is het zelfs denkbaar dat alle afzonderlijke initiële doorbuigingen elkaar compenseren en er een gemiddelde waarde van nul resulteert. Zolang er hierover geen voldoende gegevens bekend zijn kan een (arbitraire) schatting van bij voorbeeld de helft van de waarde in de UGT wellicht bruikbaar zijn om toch een indruk te krijgen van het eindresultaat.

Hoewel in de normen geen bepalingen zijn opgenomen over vervormingen in de 'zwakke' richting, zou het denkbaar zijn hieraan vergelijkbare eisen te stellen als aan de 'sterke' richting. De rekenprocedure is in ieder geval zeer eenvoudig en kan worden uitgevoerd met behulp van het volgende schema:

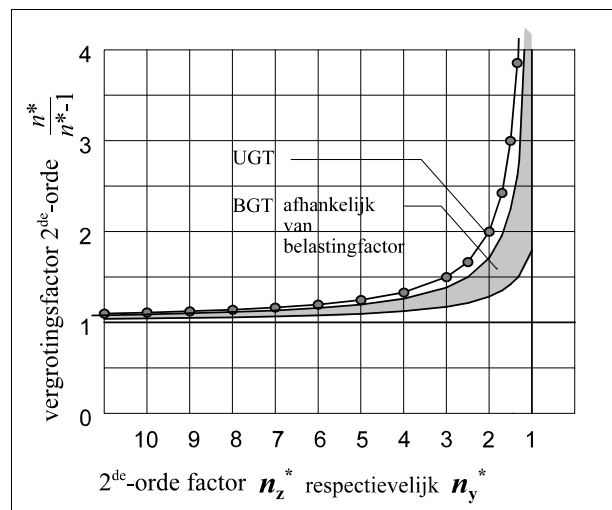
1. Berekening van de factor n_z^* volgens de in hoofdstuk 5 of 6 afgeleide formules	$\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{n_{zM}^*} + \frac{1}{n_{zF}^*} \quad (8.58)$
2. Vervolgens berekening van de maatgevende uitbuiging te met:	$\bar{v} = (\bar{v}_0 + \bar{v}_1) \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} \quad (8.59)$
3. Tenslotte toetsen met:	$\bar{v} \leq v_{\text{toelaatbaar}} = \text{meestal } 0,004 L \quad (8.60)$

N.B. Ook hier zal een (arbitraire) waarde van v_0 gekozen moeten worden.

Algemeen

De belastingen in de UGT zijn (door de in rekening te brengen belastingfactor) groter dan in de BGT, met als gevolg dat dan ook de 2^{de}-orde vervormingen groter zijn. Zie figuur 8.11.

Duidelijk is te zien hoe de vervormingen en de daaruit volgende spanningen onbeheersbaar worden als de 2^{de}-orde term n^* (te) dicht nadert tot de fatale waarde 1.



figuur 8.11

Het apart bepalen van n_z^* en/of n_y^* biedt zeer goede informatie over de 2^{de}-orde effecten en is daarom een waardevolle bijdrage aan het ontwerpen en bouwen van veilige draagconstructies.

Met de hier ontwikkelde methodiek kan nu op dezelfde wijze de stabiliteit en sterkte (in de UGT) en de stijfheid (in de BGT) van rechte staven worden berekend en getoetst.

8.4 Vergelijking met toetsen volgens de Eindige-ElementenMethode

In Bijlage 8 zijn voor enkele staven en belastingcombinaties de uitkomsten van de toets volgens de in deze dissertatie ontwikkelde methode, aangeduid met "Rv", vergeleken met de volgens de algemeen toegepaste en betrouwbaar geachte EEM (Eindige-ElementenMethode) berekende resultaten. In het kader van deze dissertatie wordt de EEM als exact beschouwd.

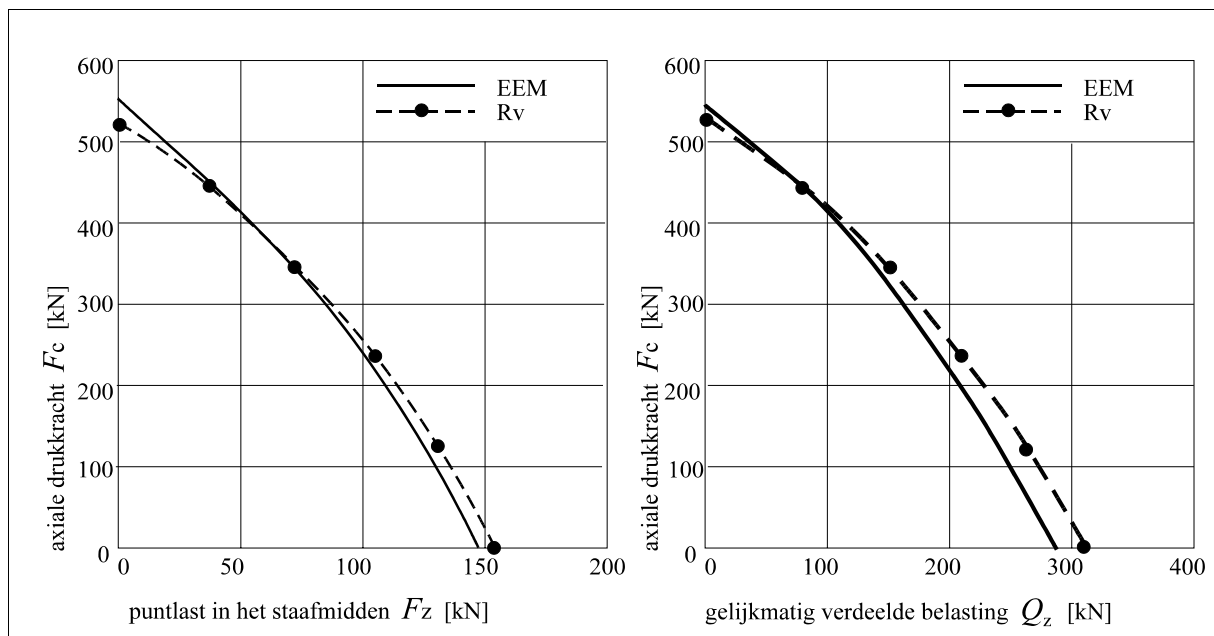
De gehanteerde uitgangspunten zijn:

- E-modulus evenwijdig aan de vezels: $E_0 = 10000 \text{ N/mm}^2$
- E-modulus loodrecht op de vezels: $E_{90} = 400 \text{ N/mm}^2$ (alleen van belang bij de EEM)
- glijdingsmodulus: $G = 625 \text{ N/mm}^2$
- buig- en druksterkte: $f_m = f_c = 30 \text{ N/mm}^2$
- initiële uitbuiging: $\bar{v}_0 = L/300$
- in alle gevallen wordt bij de EEM-berekeningen nergens de materiaalsterkte overschreden, respectievelijk wordt voldaan aan de toets volgens (8.11).

Van een selectie van de in Bijlage 8 beschouwde gevallen belast door een geconcentreerde belasting in het midden van de staaf, respectievelijk een gelijkmatig verdeelde belasting, zijn de uitkomsten van de berekeningen weergegeven in de figuren 8.12 respectievelijk 8.13.

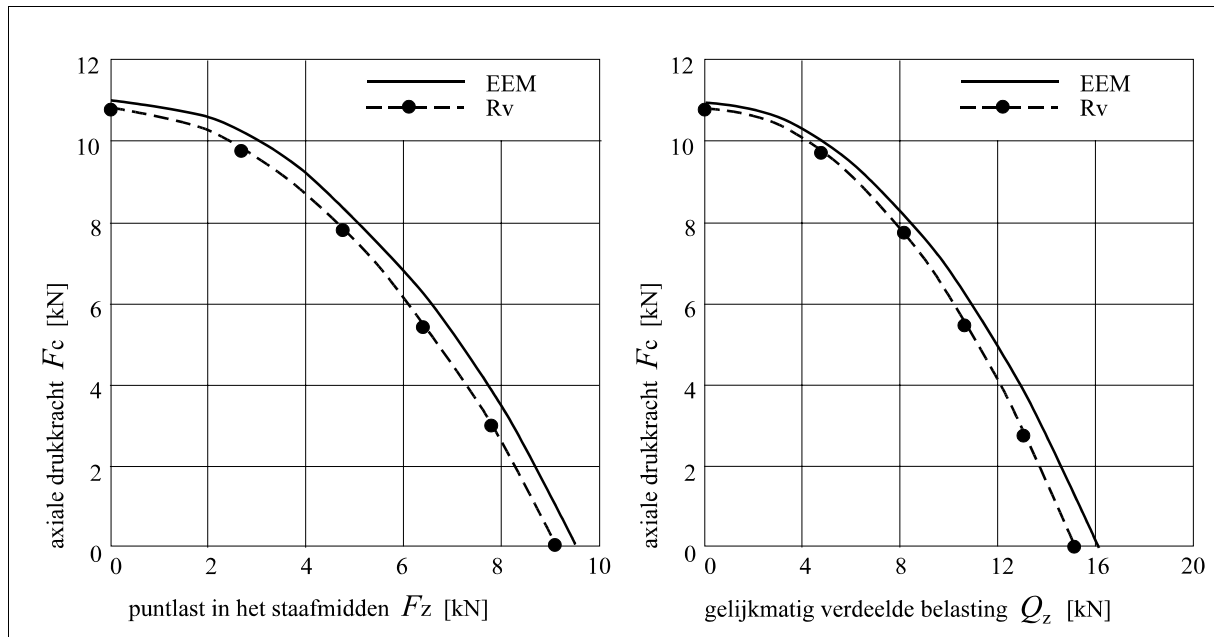
- op de horizontale assen: de belasting loodrecht op de staafas,
- op de verticale assen: de bijbehorende axiale drukkracht.

a. voor een korte, brede staaf: lengte 2 m, hoogte 400 mm, breedte 100 mm



figuur 8.12

b. en een lange smalle staaf: lengte 6 m, hoogte 400 mm, breedte 50 mm



figuur 8.13

De uitkomsten stemmen steeds zeer goed overeen.
 Voor de onderzochte gevallen kan daarom toepassing van beide methoden gelijkwaardig worden geacht.

Hoofdstuk **9** Normen op één noemer

Met de hier ontwikkelde methodiek van berekening van de 2^{de}-orde term n_z^* en/of n_y^* kan op dezelfde wijze de stabiliteit en de sterkte (in de UGT) en de stijfheid (in de BGT) van rechte staven (prismatisch, met rechthoekige doorsnede of I-profielen) worden berekend en getoetst, ongeacht de toe te passen constructiematerialen.

De voorwaarden daarbij zijn:

- dat kan worden uitgegaan van de elasticiteitstheorie, dus dat er een lineaire relatie is en blijft tussen spanningen en vervormingen,
- dat er betrouwbare algemene gegevens beschikbaar zijn over de sterkte- en vervormingseigenschappen van het toe te passen materiaal,
- dat bij scheurvorming (lang voordat de staaf bezwijkt zoals bij gewapend beton) een zodanige reductiefactor kan worden toegepast om het verlies van sterkte en stijfheid in rekening te brengen dat de in te voeren statische eigenschappen van de doorsneden (zoals traagheids- en weerstandsmomenten enzovoort) gehandhaafd kunnen blijven,

Balken en kolommen met rechthoekige doorsnede in hout en beton en I-profielen in staal kunnen dan op dezelfde manier worden berekend, waarbij voor I-profielen extra aandacht nodig is voor de invloed van (verhinderde) welving van de doorsnede en flensbuiging.

Hoewel deze methodiek onafhankelijk van normen kan worden toegepast (zie het begin van Hoofdstuk 8) is het toch interessant om de uitkomsten te vergelijken met de bepalingen in de belangrijkste normen betreffende bouwkundige draagconstructies.

hout: NEN 6760 TGB 1990 Houtconstructies - basiseisen, eisen en bepalingmethoden
 EC 5 prEN 1995-1-1 Design of timber structures
 staal: NEN 6770 TGB 1990 Staalconstructies - basiseisen en rekenregels
 NEN 6771 TGB 1990 Staalconstructies - stabiliteit
 beton: NEN 6720 TGB 1990 Voorschriften beton - constructieve eisen en rekenmethoden

In deze normen is soms de 2^{de}-orde term n (gedefinieerd als: $n = F_{\text{Euler}}/F_c$) en de daaruit volgende 2^{de}-orde vergrotingsfactor $n/(n-1)$ direct of indirect herkenbaar bij bepalingen over de (knik)stabiliteit van kolommen, maar nergens is iets duidelijk te vinden over mogelijke 2^{de}-orde effecten bij berekeningen van de kipstabiliteit.

Alle stabiliteitsbepalingen bestaan vooral uit voorgeschreven reducties van de druk- en/of buigsterkte met behulp van zogenoemde knik- of kipfactoren. Deze factoren zijn alle afhankelijk van de (relatieve) slankheid van de betreffende staaf en met enige inspanning lukt het vaak om de voorgeschreven knikfactoren 'terug te rekenen' tot hun oorsprong om dan te

ontdekken dat ze op dezelfde uitgangspunten zijn gebaseerd als de in deze dissertatie ontwikkelde methode.

Een beschouwing over in deze normen voorkomende bepalingen betreffende op druk belaste rechte staven is opgenomen in Bijlage 2. Daar blijkt dat het zeer goed mogelijk is om voor de materialen hout, beton en staal de knikstabiliteit te bepalen volgens dezelfde identieke methode. Op zich zelf is dat logisch, maar wie bekend is met de grote verschillen in formules, factoren en randvoorwaarden in de verschillende normen zal daardoor zeker verrast zijn.

Hier volgen soortgelijke beschouwingen betreffende de kipstabiliteit van rechte staven in de drie genoemde materialen.

Om vergelijkingen goed mogelijk te maken zijn alle notaties in de betreffende normen omgezet in de notaties van deze dissertatie.

9.1 NEN 6760 TGB 1990 Houtconstructies

De eigenwaarde van de kipbelasting voor een houten staaf zonder axiale drukkracht is te ontleen aan het norm-artikel: 11.14. Bepaling van de kritieke buigspanning

De formule voor de kipsterkte kan worden geschreven in de notaties van deze dissertatie:

$$\sigma_{mcr} = \frac{k_{Ez} h}{2r_y} \cdot \frac{f_c}{1 - \frac{I_z}{I_y}} \left(\sqrt{\frac{e^2}{h^2} + \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) \left(\frac{4L^2 GI_{tor}}{\pi^2 EI_z h^2} + \frac{4I_w}{h^2 I_z} \right)} + \frac{e}{h} \right) \quad (9.01)$$

$$\text{waarin: } r_y = \frac{W_y}{bh} \quad \text{en: } k_{Ez} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 f_c} = \frac{\pi^2 EI_z^2}{L^2 f_c bh} = \frac{F_{Ez}}{f_c bh} = \frac{\sigma_{Ez}}{f_c}$$

De factor k_{Ez} is identiek aan de reciproque waarde van het kwadraat van de relatieve slankheid die in NEN 6770 en EC 5 wordt gedefinieerd als:

$$\lambda_{rel} = \frac{1}{k_{Ez}} = \sqrt{\frac{f_c}{f_E}} \quad (9.02)$$

De aan σ_{mcr} ten grondslag liggende vierkantsvergelijking is terug te vinden via de volgende bewerkingen:

$$\text{De term: } \left(\frac{GI_{tor} 4L^2}{\pi^2 EI_z h^2} + \frac{4I_w}{h^2 I_z} \right) \text{ komt overeen met: } \frac{4GI_{tor}}{F_{Ez} h^2} \left(1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_{tor}} \right) = \frac{4GI_t}{F_{Ez} h^2} \quad (9.03)$$

Het kritisch moment is: $\bar{M}_{ycr} = \sigma_{mcr} W_y = \sigma_{mcr} bhr_y$ (9.04)

Dat wil zeggen: het moment waarbij de vervormingen van de staaf onbeheersbaar worden en de stabiliteit verloren gaat.

De kritieke spanning is dus te schrijven als:

$$\sigma_{mcr} = \frac{\bar{M}_{ycr}}{bhr_y} = \frac{F_{Ez}}{bh} \frac{h}{2r_y} \cdot \frac{1}{1 - \frac{I_z}{I_y}} \left(\sqrt{h^2 + \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) \frac{4GI_t}{F_{Ez}h^2}} + \frac{e}{h} \right) \text{ waaruit volgt:}$$

$$\frac{2\bar{M}_{ycr}}{F_{Ez}h} \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) = \sqrt{h^2 + \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) \frac{4GI_t}{F_{Ez}h^2}} + \frac{e}{h}$$

$$\left\{ \frac{2\bar{M}_{ycr}}{F_{Ez}h} \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) - \frac{e}{h} \right\}^2 = \frac{e^2}{h^2} + \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) \frac{4GI_t}{F_{Ez}h^2}$$

$$\left(\frac{2\bar{M}_{ycr}}{F_{Ez}h} \right)^2 \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right)^2 - \frac{4\bar{M}_{ycr}}{F_{Ez}h} \frac{e}{h} \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) = \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) \frac{4GI_t}{F_{Ez}h^2}$$

$$\left(\frac{2\bar{M}_{ycr}}{F_{Ez}h} \right)^2 \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) - \left(\frac{4\bar{M}_{ycr}}{F_{Ez}h} \right) \frac{e}{h} - \frac{4GI_t}{F_{Ez}h^2} = 0$$

Na deling door alle gelijke termen resulteert de gezochte vierkantsvergelijking:

$$\frac{\bar{M}_{ycr}^2}{F_{Ez}} \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) - \bar{M}_{ycr} e - GI_t = 0 \text{ die ook is te schrijven als:}$$

$$\left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) \frac{\bar{M}_{ycr}^2}{F_{Ez} (GI_t + \bar{M}_{ycr} e)} = \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) \frac{\bar{M}_{ycr}^2}{M_{kr}^2 + \bar{M}_{ycr} e F_{Ez}} = 1 \quad (9.05)$$

De opbouw van deze vergelijking stemt in principe overeen met de resultaten van deze dissertatie (zonder axiale drukkracht) maar er zijn toch opvallende verschillen te signaleren.

Opmerkelijk is de reductiefactor waarin de stijfheid in de 'sterke' richting voorkomt. Hierdoor kunnen er bij relatief brede/lage balken aanzienlijke afwijkingen ontstaan. Deze term komt overigens (zonder nadere uitleg) ook voor in STEP 1 B3/3 [15] maar niet in EC5 [43] waarop STEP is gebaseerd.

Een verklaring zou kunnen zijn dat de gunstige werking van een dwarsbelasting in de 'zwakke' richting gecombineerd met doorbuiging in de 'sterke' richting de torsiemomenten verkleint, maar dan moet die dwarsbelasting er wel zijn. Bovendien moet de doorbuiging in beide richtingen evenredig zijn met de belasting, hetgeen door 2^{de}-orde-effecten niet het geval is. Een nadere analyse hiervan in Bijlage B4 leidt tot de conclusie dat de invloed van de stijfheid om de 'sterke' as zo verwaarloosbaar klein is dat de hier bedoelde term altijd veilig buiten beschouwing kan blijven.

Voor het moment in de teller kan volgens artikel 11.14 worden gerekend met het gemiddelde moment over de middelste balkhelft. De hierbij behorende factor $1/\rho$ volgens Bijlage C van NEN 6760) komt zeer nauwkeurig overeen met de in de Hoofdstukken 5 en 6 afgeleide reductiefactor k_1 . In de noemer ontbreekt de reductiefactor k_2 maar omdat hierop dezelfde reductiefactor van toepassing is kan de vierkantsvergelijking ook worden geschreven als:

$$\frac{\left(\frac{\bar{M}_{ycr}}{\rho}\right)^2}{M_{kr}^2 + \left(\frac{\bar{M}_{ycr}}{\rho}\right)eF_{Ez}} = 1 \quad \text{wat overeenstemt met:} \quad \frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2\bar{M}_{y1}eF_{Ez}} \quad (9.06a \text{ en } 9.06b)$$

$$\text{voor: } n_z^* = 1 \quad \text{als: } k_1 = k_2 = \frac{1}{\rho}$$

Voor een uitkraging gaat de vierkantsvergelijking over in

$$\frac{\bar{M}_{y1}^2}{\rho^2} = \frac{4\pi^2 EI_z GI_{t1}}{(2L)^2} \left(1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_{t1}}\right) + \frac{\bar{M}_{y1}}{\rho} e \frac{4\pi^2 EI_z}{(2L)^2} \quad \text{of:} \quad \frac{\bar{M}_{y1}^2}{4\rho^2} = M_{kr}^2 + \frac{\bar{M}_{y1}}{\rho} eF_{Ez} \quad (9.07)$$

$$\text{Dit stemt weer overeen met:} \quad \frac{(k_1\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2\bar{M}_{y1}eF_{Ez}} = 1$$

$$\text{als: } k_1 = \frac{1}{2\rho} \quad \text{en: } k_2 = \frac{1}{\rho}$$

Ter vergelijking volgt nu een overzicht met waarden van k_1 en k_2 , ontleend aan:

- NEN 6760- tabel C.1 en aan
- de Hoofdstukken 5 en 6 van in deze dissertatie, aangeduid als: Rv

staaf	belasting	ρ tabel C1	k_1 ter vergelijking		k_2 ter vergelijking	
			berekend uit ρ	Rv	berekend uit ρ	Rv
staaf op 2 steunpunten	constant moment	1,00	1,00	1,00	nvt	nvt
	q -belasting	1,13	$\frac{1}{1,13} = 0,88$	0,88	0,88	0,81
	F -last midden van de staaf	1,35	$\frac{1}{1,35} = 0,74$	0,73	0,74	0,87
uitkraging	q -belasting	*	0,58	0,24	0,58	0,65
	F -last staafeind	*	0,75	0,41	0,75	0,57

* Uitkragingen zijn in NEN 6760 gedefinieerd als twee maal zo lange symmetrisch belaste vrij opgelegde liggers waarvan de reactiekracht nul is aan de einden.

Dat betekent dat in het midden een fictieve reactiekracht in rekening wordt gebracht die even groot is als de belasting waardoor de gemiddelde momenten in het midden zijn:

- voor een q -belasting: $0,58 M_{y1}$
- voor een F -last: $0,75 M_{y1}$

Alleen voor staven op twee steunpunten komen alle waarden redelijk overeen, maar bij gebrek aan nadere toelichting is het bij uitkragingen onduidelijk hoe NEN 6760 hier moet worden geïnterpreteerd.

De rekenwijze die NEN 6760 biedt voor combinaties van buiging en druk is geheel afwijkend van andere literatuur. De 2^{de}-orde-effecten (waarover verder niets expliciet wordt vermeld) zijn verwerkt in voorgeschreven modificatiefactoren als k_m , k_{ins} , k_{mc} , k_{com} en k_{mom} .

Voor al deze factoren zijn (gecompliceerde) formules gegeven waarvan de zeer lange afleidingen zijn gepubliceerd in van der Put [22]. De toetsformule voor staven zonder axiale drukkracht is uiteindelijk zeer eenvoudig:

$$\sigma_{my} \leq k_{ins} f_m \quad (9.08)$$

Voor de factor k_{ins} worden twee formules gegeven waardoor de relatie met de slankheid van de staaf kan worden afgebeeld met twee krommen, waarvan de ene geldig is bij betrekkelijk brede staven en de andere bij smalle staven. Voor enkele gevallen is het verloop hiervan af te lezen in figuur 9.1:

Ter vergelijking is hierin ook weergegeven het verloop van:

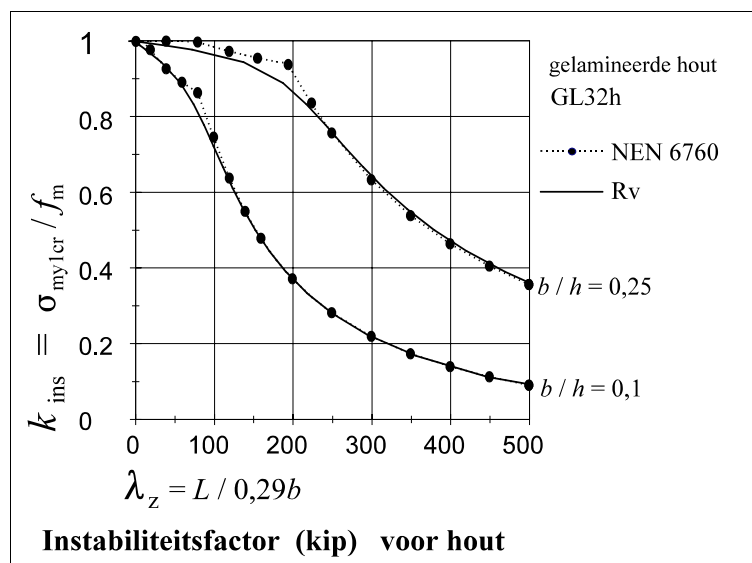
$$\sigma_{mycr} / f_m$$

zoals berekend volgens de in deze dissertatie ontwikkelde methode.

(zie Hoofdstukken 5, 6 en 8)

In de grenstoestand met $n_z^* = 1$ kan dan worden 'teruggerekend' naar:

$$k_{ins} = \frac{\sigma_{my1cr}}{f_m} \quad (9.09)$$



figuur 9.1

Het verloop van beide uitkomsten is nagenoeg identiek.

Bij kleine slankheden is NEN 6760 door de splitsing in twee lijnen iets onveilig.

Zie ook figuur B1.16 met dezelfde doorsneden volgens de benadering van Hiemstra [30].

Voor staven die belast zijn met een axiale drukkracht gecombineerd met een zijdelingse belasting treedt er een interactie op tussen druk- en buigspanningen, waarbij als algemene toetsformule (8.03) kan worden toegepast de UC (unity check):

$$\frac{\sigma_c}{f_c} + \frac{\sigma_{my1}}{f_m} + \frac{\sigma_{mz2}}{f_m} \leq 1 \quad (9.10)$$

In NEN 6760 wordt de 2^{de}-orde spanning σ_{mz2} niet rechtstreeks in rekening gebracht, maar de 1^{ste}-orde drukspanningen, respectievelijk buigspanningen worden nu gedeeld door een factor k_{com} (van: compressie, vaak ook knikfactor genoemd) respectievelijk k_{ins} (van: instabiliteit, soms ook klpfactor genoemd).

Vervolgens wordt nog een correctie aangebracht met een 'wissel' factor k_{mc} . Deze factor is bedoeld om het kromlijnige verloop van de werkelijke iteratieformule te benaderen. Aan Van der Put [21] is te ontleen dat k_{mc} wordt benaderd als een lineaire interpolatie van een kromlijnige functie van de factoren k_{ins} , k_{com} , σ_{Ez} en f_c . De in de eerste drukken van NEN 6760 voorkomende onveilige afwijkingen van k_{mc} zijn door een (in de uitgave 2001) aangebrachte begrenzing enigszins hersteld.

Tenslotte wordt getoetst met de ongunstigste van de volgende twee vergelijkingen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_c}{k_{com;z} f_c} k_{mc} + \frac{1/\rho \sigma_{my1}}{k_{ins} f_m} \leq 1 \\ \frac{\sigma_c}{k_{com;z} f_c} + \frac{1/\rho \sigma_{my1}}{k_{ins} f_m} k_{mc} \leq 1 \end{array} \right. \quad \text{de reductiefactor } 1/\rho \text{ komt overeen met } k_1 \quad (9.11)$$

Voor gevallen waarbij, met eventuele zeer kleine waarden van k_{mc} en/of k_1 , de materiaalsterkte zou worden overschreden fungeert als 'vangnet' een algemene sterktevoets:

$$\frac{\sigma_c}{f_c} + \frac{\sigma_{my1}}{f_m} \leq 1 \quad (9.12)$$

Als voorbeeld volgt nu de analyse van een gelamineerde houten ligger (overeenkomstig het breedste exemplaar uit figuur 9.1) met: $L = 8$ m, $b = 100$ mm en $h = 400$ mm met een afnemende axiale drukkracht F_c gecombineerd met een toenemende geconcentreerde belasting F_z centrisch aangrijpend in het zwaartepunt van de doorsnede, in het midden van de overspanning).

De volgende spanningen treden op: $\sigma_c = \frac{F_c}{bh}$ en: $\bar{\sigma}_{my1} = \frac{\bar{M}_{y1}}{W_y} = \frac{1/4 F_z L}{1/6 bh^2}$

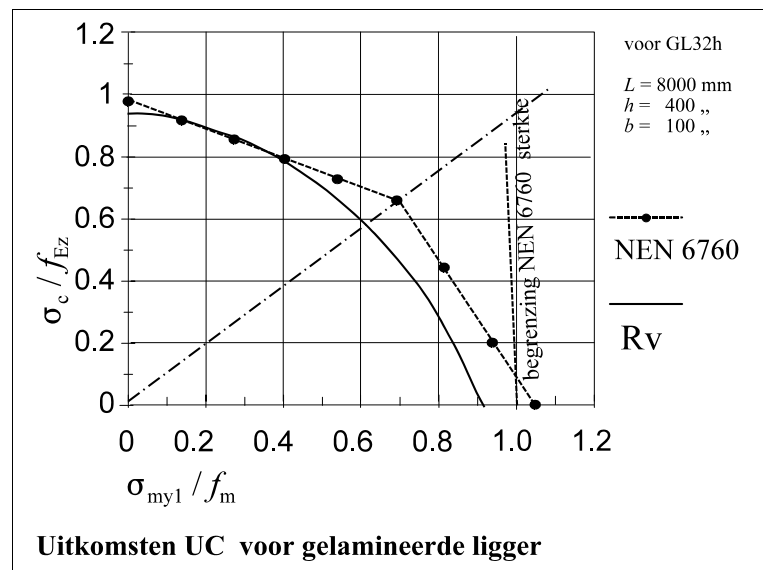
Nagegaan is welke combinaties van druk- en buigspanningen acceptabel zijn volgens:

- NEN 6760 (getoetst op stabiliteit en sterkte)
- de toetsformules in Hoofdstuk 8 van deze dissertatie, aangeduid met Rv.

De uitkomsten zijn weergegeven in figuur 9.2.

Op de assen zijn uitgezet:

- horizontaal:
verhouding:
buigspanning / buigsterkte
- verticaal:
verhouding:
drukspanning / kniksterkte



figuur 9.2

Opvallend is dat volgens NEN 6760 grotere spanningen en dus grotere belastingen acceptabel zouden zijn. Dit wordt veroorzaakt door de reductie ($1/\rho = k_1$) van de buigspanningen die niet alleen bij de bepaling van de kritische spanning, maar (ten onrechte) ook in de toets worden toegelaten.

In deze dissertatie wordt de reductiefactor k_1 echter uitsluitend toegepast om de 2^{de}-orde term n_z^* te bepalen, maar bij de berekening van de 2^{de}-orde buigspanning σ_{mz2} en de daarop volgende toets (zie Hoofdstuk 8) wordt uiteraard de volledige buigspanning in rekening gebracht, terwijl NEN 6760 blijft toetsen met de gereduceerde buigspanning.

N.B. Bij belasting door een constant buigend moment (zonder reductie) zijn de resultaten van de toetsen volgens NEN 6760 en deze dissertatie overigens wel nagenoeg gelijk.

Vervolgens is nagegaan wat de uitkomsten van beide toetsen zodenu zijn bij geleidelijk toenemende belastingen, waarbij de verhouding tussen F_c en F_z zodanig gekozen is dat de druk- en buigcomponenten in de toetsformule gelijk blijven:

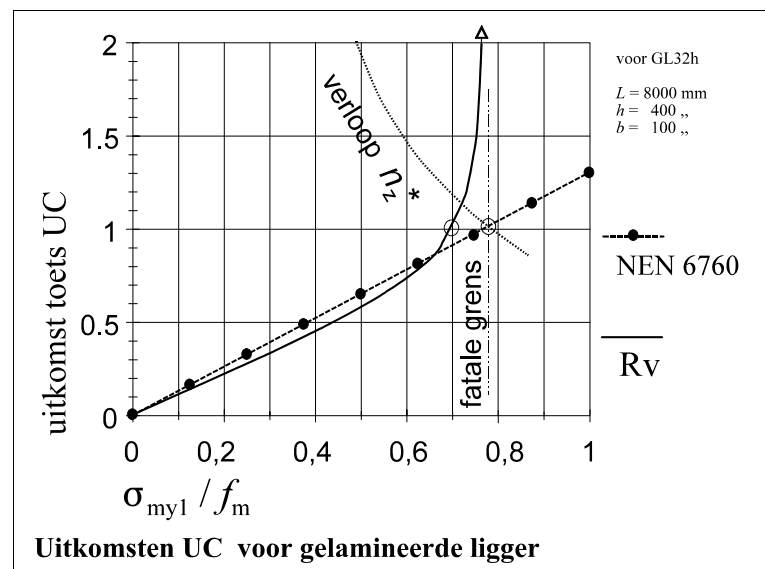
$$\frac{\sigma_c}{k_{com;z} f_c} = \frac{\sigma_{my1}}{k_{ins} f_m} \quad \text{waaruit (voor dit geval) volgt dat } F_c \text{ en } F_z \text{ ongeveer even groot zijn.}$$

De verhoudingen tussen spanning en sterkte nemen geleidelijk toe vanaf nul tot zo ver mogelijk. De uitkomsten van de berekening zijn weergegeven in figuur 9.3.

Op de assen zijn uitgezet:

- horizontaal:
verhouding:
spanning / sterkte
- verticaal:
uitkomsten toets volgens:
 - NEN 6760
 - Hoofdstuk 8.

Ter informatie wordt ook gegeven (voor zover reëel) het verloop van n_z^* .



figuur 9.3

De uitkomsten zijn grotendeels goed vergelijkbaar, maar bij nadering van de kritische belasting (bij grotere spanningen dan die behoren bij waarden van: $n_z^* > 1,3$) kunnen bij toepassing van NEN 6760 zeer gevaarlijke situaties ontstaan.

Duidelijk blijkt (uit figuur 9.3) de efficiënte mogelijkheid van de term n_z^* om te dienen als 'alarmfunctie'.

De volgende conclusies en opmerkingen kunnen worden getrokken respectievelijk gemaakt:

1. De juiste uitkomsten van de toets zijn niet lineair evenredig met de grootte van de belastingen.
2. Voor de uitkomsten volgens NEN 6760 wordt echter wel een lineair verloop gerekend. Bij een lage belasting is dit aan de veilige kant, (wat overigens verder niet belangrijk is) maar bij toename van de belasting tot nabij de 'fatale' grens (met uitkomst toets = 1) kunnen zeer onveilige situaties ontstaan.
3. De oorzaak hiervan is dat de spanningen, door de tot nul naderende waarde van de in de noemer voorkomende term: $(n_z^* - 1)$, gevaarlijk veel sneller toenemen dan de belasting.
4. In NEN 6760 ontbreekt het 'gereedschap' om dit te signaleren. In de afleidingen waarmee de betreffende formules werden ontwikkeld zijn overigens de 2^{de}-orde effecten wel verdisconteerd, zoals blijkt uit de publicatie van van der Put [21] maar de praktische gebruiker van de norm vindt daarin niets terug.
5. In de dagelijkse constructiepraktijk leiden kleine overschrijdingen van de belasting van enkele procenten nooit tot problemen, maar bij dit type constructies kan (argeloze) toepassing van een lineaire toetsformule (zoals in NEN 6760) fataal zijn.
6. Het is dus nodig dat stabiliteitsberekeningen altijd worden opgezet vanuit een duidelijke signalering van 2^{de}-orde effecten.
7. De toetsformules volgens NEN 6760 zijn op zichzelf vrij eenvoudig, maar de daarvoor nodige factoren zijn praktisch niet zonder hulpmiddelen (tabellen, grafieken, spreadsheets, computerprogramma's) te bepalen.

Opvallend is dat in NEN 6760 bij de overige bepalingen betreffende stabiliteit nergens verwijzingen voorkomen naar vergrotingen van spanningen of vervormingen ten gevolge van 2^{de}-orde effecten.

Alleen in zijdelings gesteunde op druk en buiging belaste staven is hiervan een spoor te herkennen in de betreffende toetsformule:

$$\frac{\sigma_c}{k_{com;y} f_c} + \frac{\bar{\sigma}_{my1}}{k_{mom;y} f_m} \leq 1 \quad (9.13)$$

$$\text{waarin: } k_{mom;y} = 1 - k_{com;y} \frac{\sigma_c}{\sigma_{Ey}} \quad (9.14)$$

wat duidt op een 2^{de}-orde vergroting van de buigspanningen.

Een nadere beschouwing over twee-dimensionale stabiliteitsgevallen (knik met buiging) is opgenomen in Bijlage 2.

In NEN 6760 zijn bij vlakke raamwerken zoals drie-scharnierspanten initiële uitbuigingen en hoekverdraaiingen voorgeschreven waarna als bepaling volgt: "De spanningen die ten gevolge van de excentriciteiten door de doorbuigingen optreden, moeten in rekening zijn gebracht". Hoewel hier de term '2^{de}-orde' niet expliciet is vermeld kan de goede verstaander hieruit opmaken dat er een 2^{de}-orde berekening moet worden uitgevoerd.

Overigens is in de brochure 'Driescharnierspanten' [34] aangetoond dat bij de gebruikelijke typen driescharnierspanten, door de overwegende invloed van de momenten, de 2^{de}-orde effecten slechts enkele procenten bedragen.

9.2 EC 5 prEN Design of timber structures

De bepalingen in deze Europese norm betreffende kip en knik beslaan slechts enkele bladzijden met verrassend eenvoudige formules. Desondanks zijn de uitkomsten vrij nauwkeurig.

Zijdelings ongesteunde staven met gaffelopleggingen moeten op kip (en bij aanwezigheid van drukkrachten tevens op knik) worden gecontroleerd. Gerekend wordt met een kritische kipspanning:

$$\sigma_{m,crit} = \frac{M_{y1,crit}}{W_y} = \frac{\pi \sqrt{EI_z GI_{tor}}}{L_{ef} W_y} \quad (9.15)$$

Voor rechthoekige staven wordt dit uitgewerkt tot:

$$\sigma_{my,crit} = \frac{M_{y1}}{W_y} = \frac{\pi E \sqrt{\frac{G b^3 h}{E} \frac{b^3 h}{12 \cdot 3}}}{L_{ef} \frac{bh^2}{6}} = \frac{0,78 E b^2}{L_{ef} h} \quad (9.16)$$

Hierin is L_{ef} een fictieve staafengte (meestal kleiner dan L) die afhankelijk wordt gesteld van het belastingtype (gelijkmatig verdeeld of puntlast) en het al dan niet excentrisch aangrijpen van de belasting.

Dit is vergelijkbaar met de methode zoals ontwikkeld in deze dissertatie bij toepassen van de factor k_1 waarmee (eveneens fictief) het maximale moment wordt verkleind.

De volgende tabel geeft van de in rekening te brengen staaflengten een overzicht:

staaf type	belasting type	L_{ef} / L	ter vergelijking	
			momentreductie	k_1
staaf op twee steunpunten met gaffelopleggingen	constant moment	1,0	1,00	1,00
	gelijkmatig verdeelde belasting	0,9	0,90	0,88
	puntlast in het midden	0,8	0,80	0,74
uitkraging	gelijkmatig verdeelde belasting	0,5	$0,5 / 2 = 0,25$	0,24
	puntlast op het vrije staafeind	0,8	$0,8 / 2 = 0,40$	0,41

Omdat de kritische kipmomenten omgekeerd evenredig zijn met de staaflengte is er een goede overeenstemming tussen de uitkomsten van EC5 en de factoren k_1 .

In EC5 wordt een in rekening gebracht met een correctie op de fictieve balklengte. Een positieve excentriciteit e heeft een gunstig effect op de kipstabiliteit. Dit wordt in rekening gebracht met een verkleining van de fictieve staaflengte. Het omgekeerde geldt voor een negatieve e . Zie de volgende tabel:

excentriciteit van de belasting	toeslag op L_{ef}
$e = -0,5 h$ belasting op de gedrukte (boven)rand	$+ 2h$
$e = +0,5 h$ hangend aan de getrokken (onder)rand	$- 0,5h$

Dat de aard van de belasting en de invloed van de excentriciteit met behulp van een correctie op de fictieve staaflengte in rekening kunnen worden gebracht, is verklaarbaar uit een vergelijking met de berekening van de kritische waarde van het moment:

$$\frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 k_1 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} = \frac{1}{n_{zM}^*}$$

Voor dit doel kan dit (met n_{zM}^*) worden geschreven als:

$$\bar{M}_{y1} = \frac{\pi}{k_1 L} \sqrt{EI_z GI_t \left(1 + \frac{k_2 \bar{M}_{y1} e}{GI_t} \right)} = \frac{\pi}{L_{eff}} \sqrt{EI_z GI_t} = M_{kr} \frac{L}{L_{eff}} \quad (9.17)$$

$$\text{Hierin is: } \frac{L_{ef}}{L} = \frac{k_1}{1 + \frac{k_2 \bar{M}_{y1} e}{GI_t}} \quad (9.18)$$

Voor enkele representatief geachte gevallen met: $h = L/15$ zijn de uitkomsten hiervan berekend en weergegeven in figuur 9.4:

Uitgezet zijn:

op de horizontale as: L_{eff} / L
op de verticale as: e / h

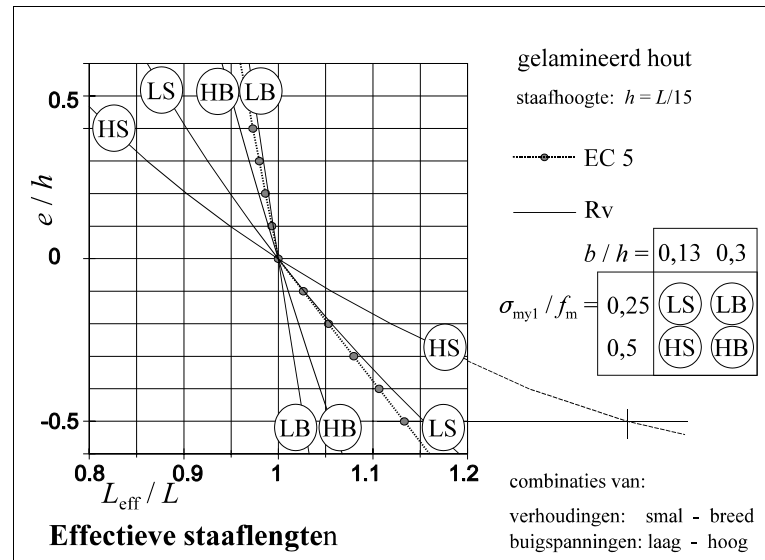
voor:

- lage en hoge buigspanningen

(L en H): $\frac{\sigma_{\text{my1}}}{f_m} = 0,25$ en $0,5$

- smalle en brede doorsneden:

(S en B): $\frac{b}{h} = 0,125$ en $0,3$



figuur 9.4

N.B. overall waar de in rekening te brengen effectieve lengten L_{ef} volgens EC 5 hoger zijn dan volgens (9.18) is EC 5 veiliger en omgekeerd.

Te zien is:

- Bij een positieve excentriciteit:
EC 5 is alleen iets onveilig bij een brede staaf met lage spanning en zeer veilig bij een smalle staaf met een hoge buigspanning.
- Bij een negatieve excentriciteit:
EC 5 is veilig bij brede staven en onveilig bij smalle staven vooral bij een hoge buigspanning. De uit (9.18) volgende waarde van L_{ef} bij $e = 0,5 h$ valt ver buiten de grafiek maar de uitkomst van de achterliggende berekening geeft een uitkomst van 1,37 terwijl EC 5 komt op een verhouding van: $1 + 2h = 1 + 2/15 = 1,13$ wat duidelijk veel te weinig is.

Conclusie: De berekening volgens EC 5 is op dit punt zeer eenvoudig maar niet erg nauwkeurig en soms onveilig.

EC 5 biedt verder enkele zeer eenvoudige regels voor de berekening van de stabiliteit van op buiging en normaalkracht belaste constructie-elementen balken en kolommen.

Kolommen behoeven alleen op knik en (indien van toepassing) op knik + buiging te worden gecontroleerd. Geïntroduceerd wordt het begrip 'relatieve slankheid':

$$\lambda_{\text{rel}} = \sqrt{\frac{f_c}{\sigma_{Ez}}} = \frac{\lambda_z}{\pi} \sqrt{\frac{f_c}{E}} \quad (9.19)$$

Dit is identiek met de betreffende formule voor knikberekeningen in NEN 6770 TGB-staal (en verwant met de factor k_{Ez} in NEN 6760). Met behulp hiervan wordt een 'knikfactor' k_c (afhankelijk van de knikrichting te onderscheiden in k_{cy} respectievelijk k_{cz}) berekend waarvan het verloop nagenoeg overeenkomt met k_{com} uit NEN 6760 en de stabiliteitskrommen uit NEN 6770 (TGB-staal).

Voor een vergelijking met de in deze dissertatie ontwikkelde methode: zie Bijlage 2.

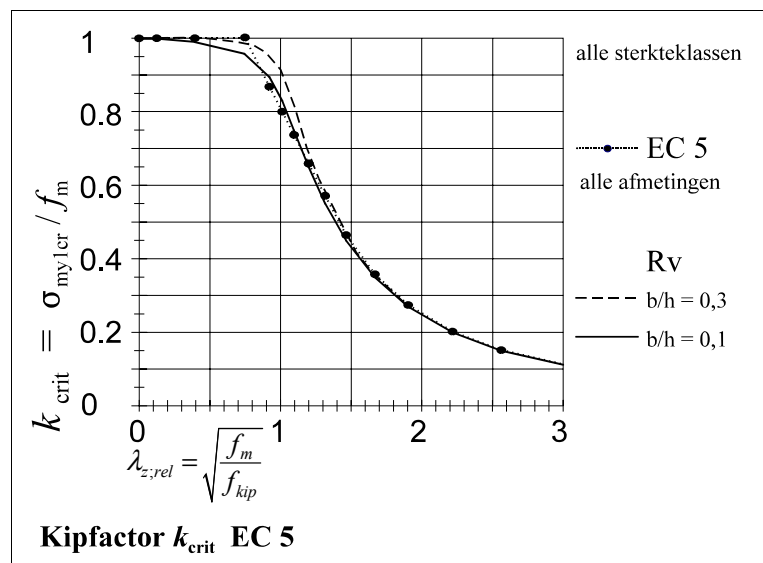
Bij de berekening van de kipstabiliteit wordt de 'relatieve' slankheid ontleend aan de grootte van het kritische kipmoment:

$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{\frac{f_m}{\sigma_{m,crit}}} \quad (9.20)$$

Dit is identiek aan de betreffende formule in NEN 6771 TGB-staal stabiliteit.

De reductiefactor k_{crit} die hiermee wordt berekend is zeer eenvoudig. Het verloop van k_{crit} , dat geldt voor alle sterkteklassen en doorsnedeafmetingen, is af te lezen in figuur 9.5.

Ter vergelijking is hierin ook weergegeven het verloop van: σ_{my1cr} / f_m zoals dat berekend is volgens de in deze dissertatie (zie Hoofdstuk 5, 6 en 8) ontwikkelde methode.



figuur 9.5

Het algemene verloop is zeer goed vergelijkbaar.

- Bij relatief grote slankheden zijn beide uitkomsten nagenoeg identiek.
- Bij kleinere slankheden, van ongeveer 0,5 à 1,2, ontstaan verschillen omdat EC5 hier te lage (overigens veilige) waarden geeft.

Dit zou eenvoudig zijn te verbeteren door de benaderingsformule iets aan te passen.

De toetsformule bestaat vervolgens uit een lineaire drukcomponent en een kwadratische buigcomponent:

$$\frac{\sigma_c}{k_{cz} f_c} + \left(\frac{\sigma_{my}}{k_{crit} f_m} \right)^2 \leq 1 \quad (9.21)$$

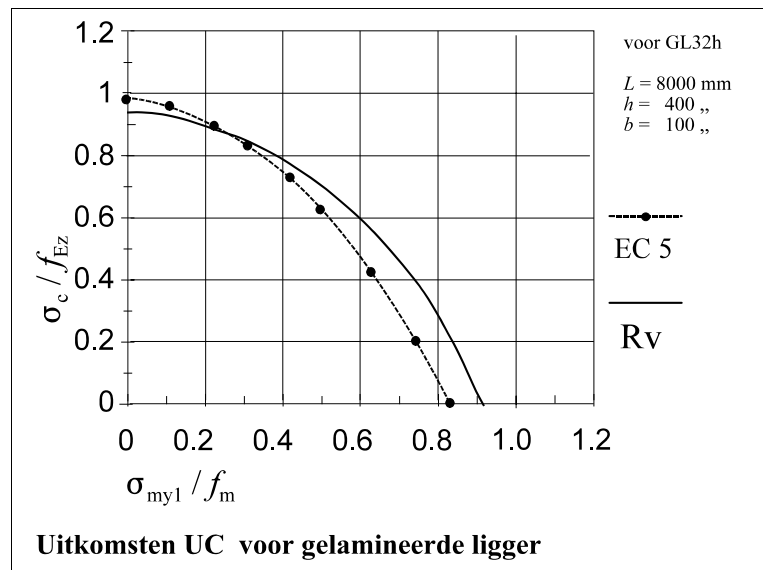
Hetzelfde voorbeeld als bij de beschouwing over NEN 6760 is nu berekend volgens:

- a. EC 5
- b. de toetsformules (8.10) van deze dissertatie

De uitkomsten zijn weergegeven in figuur 9.6.

Op de assen zijn uitgezet:

- horizontaal:
buigspanning / buigsterkte
- verticaal:
drukspanning / kniksterkte



figuur 9.6

Opvallend is dat in EC 5 vooral de buigspanningen sterker worden beperkt.

Dit wordt veroorzaakt door de te lage (veilige) waarde van de kipfactor zoals gesignaleerd bij de grafieken van figuur 9.5.

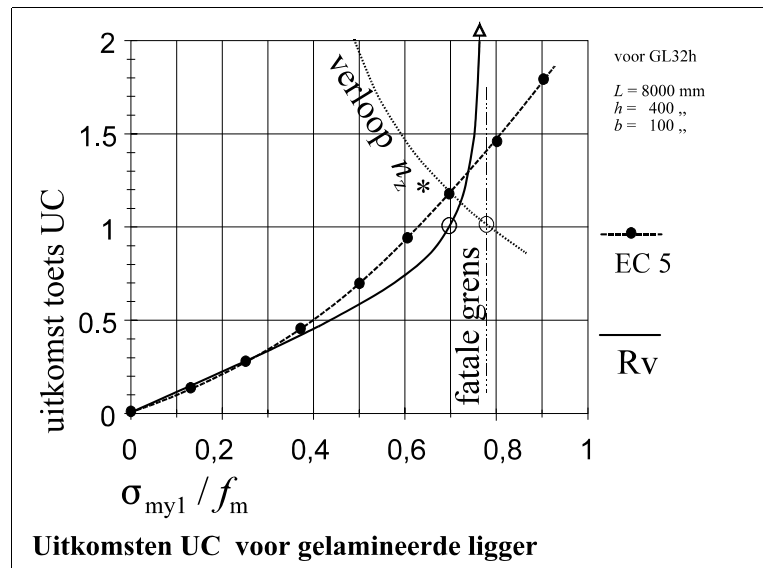
Vervolgens is nagegaan wat de uitkomsten van beide toetsen zou zijn bij geleidelijk toenemende belastingen, waarbij van dezelfde staaf met de dezelfde belastingen is uitgegaan als bij de overeenkomstige vergelijking bij NEN 6760. De verhouding tussen F_c en F_z is weer zodanig gekozen is dat de druk- en buigcomponenten in de toetsformule gelijk blijven. De uitkomsten van de berekening zijn weergegeven in figuur 9.7.

Op de assen zijn uitgezet:

horizontaal:
spanning / sterkte

- verticaal:
uitkomsten toets volgens:
- EC 5
- Hoofdstuk 8.

Ter informatie wordt ook
gegeven het verloop van n_z^* .
(voor zover reëel)



figuur 9.7

De uitkomsten zijn grotendeels redelijk vergelijkbaar. Door de combinatie van een parabolisch en een lineair verloop van de toets (zie (9.12)) stijgt de uitkomst van de UC bij nadering van de kritische belasting sneller met toepassing van EC 5 dan met NEN 6760, maar desondanks kunnen ook hier gevaarlijke situaties ontstaan.

De volgende conclusies en opmerkingen kunnen worden getrokken respectievelijk gemaakt:

1. EC 5 heeft als belangrijk voordeel ten opzichte van NEN 6760 dat de berekeningen veel eenvoudiger zijn.
2. Hoewel het verloop van belastingen en spanningen volgens EC 5 (als er hoofdzakelijk buigspanningen optreden) niet lineair is en de uitkomst van de toets bij toenemende belasting dan wat sterker stijgt, gelden toch dezelfde bezwaren als gesignaleerd bij de berekening volgens NEN 6760.
3. Bij nadering van de kritische belasting (dus bij waarden van $n_z^* < 1,3$) treedt ook hier een onevenredig grote stijging van de spanningen op, waarvoor in de berekening volgens EC5 geen enkele waarschuwing is ingebouwd.
4. Het is en blijft dus nodig dat stabiliteitsberekeningen altijd worden opgezet vanuit een duidelijke signalering 2^{de}-orde effecten.

9.3 NEN 6770 TGB 1990 Staalconstructies - Basiseisen en basisrekenregels

Deze norm geeft enkele eenvoudige toetsingsregels voor een beperkt aantal staatypes en maatverhoudingen daarvan. Het is daarbij dus te verwachten dat hieruit een veilige bovengrens voor de in rekening te brengen belastingen zal resulteren.

Voor afwijkende gevallen kan de speciale stabiliteitsnorm NEN 6771 worden toegepast.

Voor op druk belaste staven wordt geïntroduceerd het begrip 'relatieve slankheid':

$$\lambda_{rel} = \sqrt{\frac{f_c}{\sigma_E}} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_c}{E}} \quad (9.22)$$

Zie ook: EC5 en NEN 6760.

Eenvoudige gevallen van op druk belaste staven kunnen (geheel vergelijkbaar met de knikformule voor hout) worden getoetst met:

$$\frac{F_c}{\omega_{buc} N_u} \leq 1. \quad (9.23)$$

De knikfactor ω_{buc} kan worden ontleend aan een tabel, een grafiek (instabiliteitskromme, afhankelijk van profielkeuze) of een formule. Deze formule blijkt (evenals de factor k_{com} bij houten staven) de oplossing te zijn van een vierkantsvergelijking, die is gebaseerd op dezelfde stabiliteitstoets als in deze dissertatie is afgeleid in de Hoofdstukken 5, 6 en 8.

Voor een nadere beschouwing en vergelijking zie Bijlage 2.

Kipberekeringen zijn in dit algemene deel van de TGB Staal zeer eenvoudig:

1. Allereerst worden enkele gevallen gedefinieerd waarbij een kipberekening achterwege kan worden gelaten.
2. Voor eenvoudige gevallen kan worden getoetst met een zelfde formule als bij knik:

$$\frac{\sigma_{my1}}{\omega_{kip} f_m} \leq 1 \quad (9.24)$$

Hierin wordt de factor ω_{kip} op dezelfde wijze berekend als ω_{buc} maar nu uitgaande van de relatieve slankheid die behoort bij kip:

$$\lambda_{rel} \approx 1,28 \sqrt{\frac{Lh f}{bt_f E}} \quad (9.25)$$

Aan Vuistregels [35] en Bijlage 3 ([B3.4]) kan worden ontleend dat globaal kan worden gerekend met: $t_f = 0,044h$ en $i_z = 0,24b$

Voor I-profielen is de relatieve slankheid voor kip dus ongeveer:

$$\lambda_{rel} \approx 1,23 \sqrt{\frac{0,24L}{0,044i_z} \frac{f}{E}} = 2,86 \sqrt{\frac{\lambda_z f}{E}} = 0,096 \sqrt{\lambda} \quad (9.26)$$

3. Voor ingewikkelder en bijzondere gevallen wordt in NEN 6770 verwezen naar de speciale norm over stabiliteit NEN 6771.

Bij de berekening van op druk en/of buiging belaste staven worden verder geen 2^{de}-orde vergrotingsfactoren gebruikt, maar bij ongeschoorde raamwerken komen deze factoren wel

steeds voor in de gedaante: $\frac{n}{n-1}$.

Voor de verhouding tussen de kipfactor ω_{kip} en de relatieve (kip)slankheid worden dus door NEN 6770 dezelfde formule, tabel en grafiek toegepast. Dat is uiteraard wel eenvoudig maar niet overal nauwkeurig.

Omdat de reciproque waarde van de 2^{de}-orde term n_z^* , in tegenstelling tot knikgevallen, niet lineair evenredig is met de drukspanning maar evenredig is met het kwadraat van de buigspanning is het in principe onmogelijk dat de kipfactor over het gehele slankheidsverloop gelijk zou zijn aan de knikfactor. Vooral bij kleinere slankheden zijn vrij grote kipspanningen mogelijk, waarbij door het kwadrateren van de verhouding $\sigma_{kr,kip} / \sigma_{buiging}$ een vrij grote term n_z^* kan ontstaan. Het gevolg daarvan is dat er kleinere 2^{de}-orde effecten optreden, waardoor een grotere kipfactor ω_{kip} in rekening gebracht zou kunnen worden.

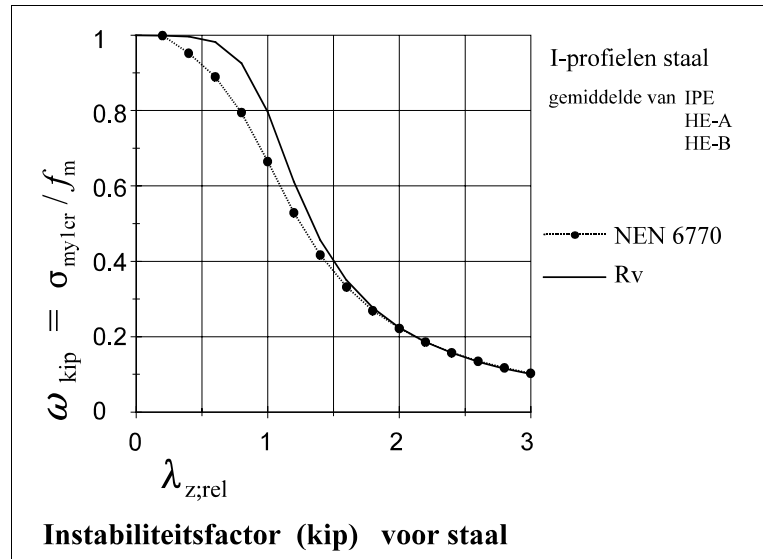
Om dit te kunnen vergelijken is, gebruik makend van de benaderingsformules uit Vuistregels [35] en Bijlage 3 (B3.4) en (B3.5), voor het gemiddelde van drie I-profielen (IPE, HE-A en HE-B) de kipfactor ω_{kip} berekend volgens stabiliteitskromme-a van NEN 6770 die behoort bij walsprofielen. Daarnaast is de verhouding tussen kritische spanning en buigsterkte σ_{mycr} / f_m berekend volgens de in deze dissertatie ontwikkelde methode (zie Hoofdstukken 5, 6 en 8). Hier zijn uiteraard dezelfde Vuistregels gebruikt.

Voor de waarde $n_z^* = 1$ is nu 'teruggerekend' naar een vergelijkbare: $\omega_{kip} = \frac{\sigma_{my1cr}}{f_m}$

De resultaten van beide berekeningen zijn weergegeven in figuur 9.8:

Het algemene beeld van het verloop van de kipfactoren is goed vergelijkbaar, maar, zoals te verwachten, zijn de uitkomsten van NEN 6770 bij kleinere slankheden iets te laag. De grootste verschillen komen voor bij: $\lambda_{rel} = 0,5$ à 1 waarbij behoort: $b/L = 1/8$ à $1/30$.

In dit (praktisch veel voorkomende gebied) wordt bij toepassing van NEN 6770 de eenvoud van de berekening dus 'betaald' met een lagere in rekening te brengen belasting.



figuur 9.8

Overigens kan altijd worden geprobeerd of NEN 6771 een 'scherpere' uitkomst geeft.

9.4 NEN 6771 TGB 1990 Staalconstructies - stabiliteit

Deze norm kent een uitgebreider toepassingsgebied dan NEN 6770.

Er wordt weer uitgegaan van het begrip 'relatieve, slankheid, maar de definitie hiervan is nu gebaseerd op het theoretisch elastische kippmoment:

$$M_{ke} = k_{red} \frac{C}{L_g} \sqrt{E_d I_z G_d I_{tor}} \quad (9.27)$$

Voor de reductieterm k_{red} , die afhankelijk is van de mate van vormvastheid van de doorsnede, kan, voor de vergelijking met deze dissertatie, een waarde $k_{red} = 1$ worden aangehouden.

In de factor C zijn verwerkt: lengte van de staaf, afmetingen van de doorsnede en type belasting en aangrijpingspunt daarvan.

Voor een staaf op twee gaffelopleggingen kan worden aangehouden: $L_g = L_{kip} = L_{st} = L$.

De factor C kan dan worden berekend met:

$$C = \frac{\pi C_1 L_g}{L} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\pi S}{L} \right)^2 + \left(\frac{\pi S}{L} C_2 \right)^2} + \frac{\pi S}{L} C_2 \right] \quad (9.28)$$

$$\text{met hierin: } S = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{EI_z}{GI_{tor}}} = \sqrt{\frac{EI_w}{GI_{tor}}} \quad (9.29)$$

Verwarrend is dat de factor S zowel betrekking heeft op de weerstand tegen verhinderde welving * als ook op de excentriciteit ** waarmee de belasting aangrijpt.

- * De torsiestijfheid: GI_t is opgebouwd uit drie componenten: 'zuivere' torsie volgens De Saint Venant, verhinderde welving en de invloed van de normaalkracht volgens het Wagner-effect (dat hier verder buiten beschouwing wordt gelaten). Zie voor een uitgebreidere beschouwing Bijlage 3.
Voor staven op twee steunpunten met I -vormig doorsnedeprofiel en met sinusvormig rotatieverloop kan dan worden aangehouden:

$$GI_t = GI_{tor} + \frac{\pi^2}{L^2} EI_w = GI_{tor} + \frac{\pi^2}{L^2} \frac{EI_z h^2}{4} = GI_{tor} (1 + C_{tw}) \quad (9.30)$$

De factor: $\left(\frac{\pi S}{L}\right)^2$ komt dus overeen met 'toeslag' op de 'zuivere' torsiestijfheid:

$$C_{tw} = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{EI_w}{GI_{tor}} = \frac{\pi^2 EI_z h^2}{4L^2 GI_{tor}} \quad (9.31)$$

Voor de duidelijkheid wordt deze term nu ingevoerd op de plaatsen waar onmiskenbaar de welvingscomponent is bedoeld.

- ** De formule in NEN 6771 geldt voor aangrijping van de belasting op de bovenflens waarbij geldt: $e = 0,5h$.
De component die hierop betrekking heeft is herkenbaar aan de bijbehorende factor C_2 . Deze factor is geen constante maar moet apart worden berekend uit de excentriciteit van het aangrijpingspunt van de belasting en kan daardoor ook van teken wisselen.
Duidelijker zou dan zijn om in plaats van alleen de term C_2 in de formule in te vullen:

$$C_2 \frac{e}{0,5h}$$

In de notaties van Hoofdstuk 3 van deze dissertatie wordt voor een staaf zonder kipsteunen volgens NEN 6771 het theoretisch elastische kipmoment met (9.28) berekend met:

$$\bar{M}_{y1} = \frac{C}{L} \sqrt{EI_z GI_{tor}} = \frac{\pi C_1}{L} \sqrt{EI_z GI_{tor}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\pi S}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi S}{L} C_2\right)^2} + \frac{\pi S}{L} C_2 \right] \quad (9.32)$$

Voor de factoren C_1 en C_2 zijn waarden gegeven voor staven op twee steunpunten met gaffels en uitkragingen voor de meest voorkomende belastinggevallen in tabel 9.

Vergelijking (9.32) kan worden uitgewerkt als:

$$\frac{\bar{M}_{y1}L}{C_1\pi\sqrt{EI_zGI_{t1}}} - \frac{\pi S}{L}C_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi S}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi S}{L}C_2\right)^2} = \sqrt{1 + C_{tw} + \left(\frac{\pi S}{L}C_2\right)^2} \quad (9.33)$$

Na kwadrateren blijft over de vierkantsvergelijking:

$$\frac{\bar{M}_{y1}^2L^2}{C_1^2\pi^2EI_zGI_{tor}} - \frac{2C_2\bar{M}_{y1}S}{C_1\sqrt{EI_zGI_{t1}}} = 1 + C_{tw} \quad (9.34)$$

Omdat dit geldt voor: $e = 0,5 h$ kan elke gewenste excentriciteit in rekening worden gebracht door de term waarin C_2 voorkomt te vermenigvuldigen met de factor $2e/h$ zodat deze vierkantsvergelijking (na rangschikking) ook kan worden geschreven als:

$$\frac{\bar{M}_{y1}^2L^2}{C_1^2\pi^2EI_zGI_{tor}} = 1 + C_{tw} + \frac{2C_2\bar{M}_{y1}}{C_1\sqrt{EI_zGI_{tor}}} \left(\frac{h}{2} \sqrt{\frac{EI_z}{GI_t}} \right) \frac{2e}{h} = 1 + C_{tw} + \frac{2C_2\bar{M}_{y1}e}{C_1GI_{tor}}$$

Invoering van de Eulerse knikkraft leidt tot:

$$\frac{\bar{M}_{y1}^2}{C_1^2} = \frac{\pi^2EI_zGI_{tor}}{L^2} \left(1 + C_{tw} + \frac{2C_2\bar{M}_{y1}e}{C_1GI_{tor}} \right) = F_{Ez}GI_t + \frac{2C_2\bar{M}_{y1}eF_{Ez}}{C_1}$$

waarna tenslotte overblijft:
$$\left(\frac{\bar{M}_{y1}}{C_1} \right)^2 = M_{kr}^2 + \frac{2C_2}{C_1} \bar{M}_{y1}eF_{Ez} \quad (9.35)$$

Dit stemt geheel overeen met de ontwikkelde algemene formule voor de 2^{de}-orde term:

$$\frac{(k_1\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2\bar{M}_{y1}eF_{Ez}} = \frac{1}{n_{zM}^*} \quad \text{voor: } n_{zM}^* = 1 \quad \text{met daarin:}$$

$$k_1 = \frac{1}{C_1} \quad \text{en: } k_2 = \frac{2C_2}{C_1} \quad (9.36)$$

Voor een uitkraging worden door NEN 6771 aangepaste kiplengten in rekening gebracht. Het kritisch kiplmoment is gelijk aan dat van een staaf op twee steunpunten met dubbele lengte, zie (5.56) in Hoofdstuk 5.21, dus gaat de vergelijking over in:

$$\frac{\bar{M}_{y1}^2}{C_1^2} = \frac{4\pi^2EI_zGI_{t1}}{(2L)^2} \left(1 + \frac{\pi^2EI_w}{L^2GI_{t1}} \right) + \frac{2C_2}{C_1} \bar{M}_{y1}e \frac{4\pi^2EI_z}{(2L)^2} \quad \text{of:}$$

$$\left(\frac{\bar{M}_{y1}}{2C_1}\right)^2 = M_{kr}^2 + \frac{2C_2}{C_1} \bar{M}_{y1} e F_{Ez} \quad (9.37)$$

Dit stemt overeen met:

$$\frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} = \frac{1}{n_{zM}^*} \quad \text{voor: } n_{zM}^* = 1 \quad \text{als: } k_1 = \frac{1}{2C_1} \quad \text{en: } k_2 = \frac{2C_2}{C_1}$$

Ter vergelijking, met waarden van deze coëfficiënten ontleend aan NEN 6771- tabel 9 en de factoren k_1 en k_2 ontwikkeld in deze dissertatie, kan dienen het volgende overzicht:

staaf	belasting	C_1 tab.9	k_1 ter vergelijking		C_2 tab.9	k_2 ter vergelijking	
			berekend uit C_1	Rv.		berekend uit C_1 en C_2	Rv.
staaf op 2 steunpunten	constant moment	1,00 ($\beta=1$)*	1,00	1,00	nvt	nvt	nvt
	gelijkmatige q -last	1,13	$\frac{1}{1,13} = 0,88$	0,88	0,45	$\frac{2 \cdot 0,45}{1,13} = 0,80$	0,81
	puntlast F_z in het staafmidden	1,35	$\frac{1}{1,35} = 0,74$	0,73	0,55	$\frac{2 \cdot 0,55}{1,35} = 0,81$	0,87
uitkraging	constant moment $L_g = 2 L$	1	$\frac{2}{2 \cdot 1} = 1,00$	1,00	nvt	nvt	nvt
	gelijkmatige q -last $L_g = 0,82 L$	1,68	$\frac{0,82}{2 \cdot 1,68} = 0,24$	0,24	0,78	$\frac{2 \cdot 0,78}{1,68} = 0,93$	0,65
	puntlast F_z op het staafeind $L_g = 1,13 L$	1,45	$\frac{1,13}{2 \cdot 1,45} = 0,39$	0,41	0,56	$\frac{2 \cdot 0,56}{1,45} = 0,77$	0,57

* Als het moment over de staaf lengte eventueel niet constant is, wordt met de factor β de verhouding tussen de twee steunpuntsmomenten aangeduid.

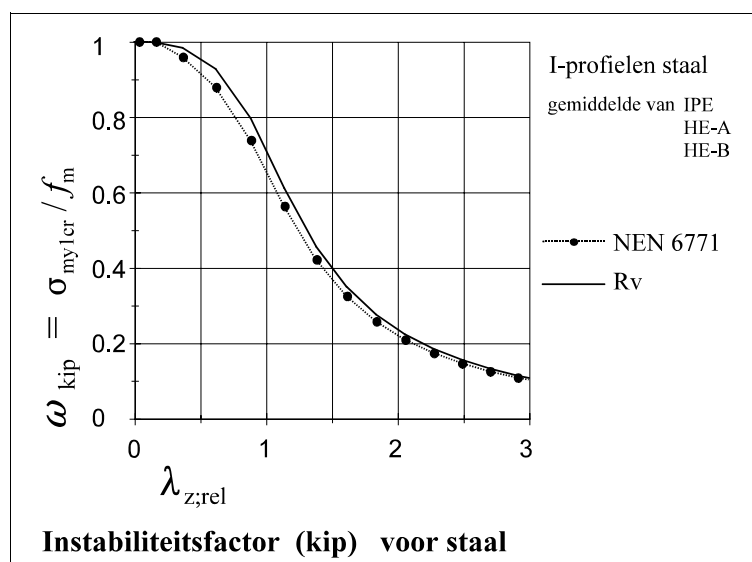
Bij een belasting door uitsluitend steunpuntsmomenten kan er geen excentriciteit optreden en zijn de factoren k_2 en C_2 dus niet van toepassing.

Voor een staaf op twee steunpunten stemmen alle uitkomsten zeer goed overeen evenals de factoren k_1 bij een uitkraging. Opmerkelijke verschillen treden daar op in de waarden van k_2 .

Het is niet duidelijk welke lengten hier volgens NEN 6771 in rekening moeten worden gebracht en waarom dit per belastinggeval zou moeten verschillen.

Omdat in NEN 6771 de relatieve slankheid anders wordt bepaald dan in NEN 6770 is de kipfactor ter vergelijking opnieuw berekend. De resultaten van beide berekeningen zijn weergegeven in figuur 9.9:

De overeenkomsten voor alle relatieve slankheden blijken nu zeer goed vergelijkbaar te zijn.



figuur 9.9

De nog overblijvende kleine verschillen in de uitkomsten zijn terug te voeren op:

1. De verschillen in formulering van de kipfactor, die in principe een derde-gradsfunctie is, maar in NEN 6771 wordt ontleend aan de tweede-gradsfunctie van de knikfactor, zoals berekend is in NEN 6770.
Een beknopte beschouwing over de hierdoor optredende verschillen is opgenomen in de bespreking van de benadering volgens Hiemstra [30] in Bijlage 1. In figuur B1.16 is te zien dat voor kleine slankheden de uitkomsten volgens de tweede-gradsfunctie (iets te veilig zijn, hetgeen goed overeenkomt met de grafieken in figuur 9.9.
2. De onvermijdelijke afrondingen die het gevolg zijn van de toepassing van de globale formules uit de Vuistregels [35].

De toetsingsregel op kipstabiliteit volgens NEN 6771 voor op buiging belaste staven is een lineaire functie zonder vergrotingsfactor:

$$\frac{\bar{M}_{y1}}{\omega_{kip} M_{uy}} \leq 1 \quad (9.38)$$

Bij de toetsingsregels voor op druk en buiging belaste staven is echter wel een 2^{de}-orde vergrotingsfactor opgenomen. Deze factor heeft overigens uitsluitend betrekking op de

grootte van de drukkracht in relatie tot de Eulerse kniksterkte, maar de vergrotingseffecten door kip ontbreken hierbij.

De volgende conclusies en opmerkingen kunnen worden getrokken respectievelijk gemaakt:

1. Toepassing van de in deze dissertatie ontwikkelde methode leidt voor de grootte van de kipfactor tot (nagenoeg) dezelfde uitkomsten als de bepalingen van NEN 6771.
2. Omdat ook bij staalconstructies (evenals bij houten staven) de buigspanningen bij toenemende belasting onevenredig stijgen, gelden dezelfde bezwaren over het ontbreken van een 'waarschuwing' tegen dreigend stabiliteitsverlies als werd gesignaleerd bij de beschouwingen over NEN 6760 en EC5.
3.

Het is en blijft dus nodig dat stabiliteitsberekeningen in alle materialen altijd worden opgezet vanuit een duidelijke signalering van 2 ^{de} -orde effecten.
--

9.5 NEN 6720 TGB 1990 Voorschriften beton

De bepalingen betreffende knik zijn bij beton geheel anders dan bij hout of staal. Oorzaak is de gecompliceerde spanningsverdeling door de combinatie van beton en wapeningsstaal. Bovendien moet worden gerekend met scheurvorming op alle plaatsen waar trekspanningen optreden, met daardoor vooral vermindering van de stijfheid.

Op basis van een groot aantal computersimulaties is een rekenmethodiek ontwikkeld waarbij, met behulp van toeslagexcentriciteiten en gebruik van grafieken en tabellen, op druk belaste staven (kolommen) praktisch kunnen worden ontworpen en getoetst.

In de berekeningen is daarbij echter niets meer terug te vinden van de invloed van de stijfheid van de constructie die bij knikberekeningen in hout en staal zo'n belangrijke rol speelt.

Desondanks is het mogelijk parallel aan deze praktische gang van zaken de in deze dissertatie ontwikkelde methodiek met 2^{de}-orde vervormingen ook op beton toe te passen.

Een nadere uitwerking hiervan is opgenomen in Bijlage 2.

Omdat bij de gebruikelijke betonconstructies zeer smalle, slanke, op buiging belaste, zijdelings ongesteunde staven (balken) zelden of nooit worden toegepast is toetsing van de kipstabiliteit praktisch (nagenoeg) nooit nodig.

Toch zijn dergelijke constructies bij nieuwe ontwikkelingen van hoge-sterkte-beton en voorspanning zeker niet ondenkbaar.

Mocht er een nadere beschouwing over het kippedrag van beton gewenst zijn dan is het vooral nodig dat betrouwbare gegevens worden verzameld over de stijfheid van gewapende doorsneden, vooral bij het optreden van (gedeeltelijke) scheurvorming.

Als een fictieve elasticiteitsmodulus (zoals ook wordt toegepast voor doorbuigingsberekeningen), aangevuld met de torsiestijfheid, als vervangende stijfheid in rekening kan worden gebracht, zijn de verdere procedures zeer eenvoudig.

Met de gebruikelijke rechthoekige doorsneden en ook bij T-vormige doorsneden speelt de verhinderde welving een even kleine rol als bij rechthoekige houten doorsneden.

Voor een effectieve benadering van de kipstabiliteit van betonconstructies biedt de in deze dissertatie ontwikkelde methodiek een goed uitgangspunt.

Alle formules die voor hout zijn ontwikkeld kunnen (met aangepaste waarden voor de stijfheid en de sterkte) zonder complicaties worden toegepast.

9.6 Conclusie

1. De geldende normen voor hout-, staal- en betonconstructies vertonen onderling zeer grote verschillen bij de behandeling van de kip- en knikstabiliteit.

2. Desondanks is het mogelijk om met de in deze dissertatie ontwikkelde methode, met toepassing van de term n_z^* en/of n_y^* de kip- en knikstabiliteit voor alle gebruikelijke constructiematerialen op dezelfde manier te berekenen.

3. De resultaten daarvan zijn nagenoeg gelijk aan de uitkomsten volgens de vergeleken normen.

4. Hoewel sommige normen bij knikgevallen wel 2^{de}-orde vergrotingen met de bekende factor $n/(n-1)$ voorschrijven (en iedere constructeur daar vertrouwd mee is) ontbreekt bij de bepalingen over kipstabiliteit (en soms zelfs ook bij knikstabiliteit) elke 'waarschuwing' dat er in het uiterste gebied iets mis dreigt te gaan. Uiteraard moet (strikt genomen) voldaan worden aan de toets, maar in de dagelijkse constructeurspraktijk rekent men er op dat kleine overschrijdingen van enkele procenten geen problemen geven. Bij dit type gevoelige constructies kan dat echter leiden tot aanzienlijk stabiliteitsverlies en dus tot instorten van de constructie.

5. Het in rekening brengen van een lineair verband tussen belastingen, vervormingen en spanningen bij stabiliteitsgevallen is daarom gevaarlijk.

Hoofdstuk 10 Toepassing, conclusies en aanbevelingen

10.1 Toepassing

De stabiliteit, sterkte en stijfheid van zijdelings ongesteunde staven kunnen worden gecontroleerd en getoetst volgens een overzichtelijke procedure:

1. Verzamelen gegevens:
 - bepaling maatgevende momenten en axiale kracht, excentriciteit van de belasting,
 - initiële uitbuiging, statische doorsnedegrootheden, materiaaleigenschappen.
2. Keuze (reductie)factoren, afhankelijk van staaftype en belasting.
3. Bepaling benodigde componenten afhankelijk van staaftype en belasting:
 - 2^{de}-orde term n^* en daaruit:, 2^{de}-orde momenten
4. Toetsen: bepaling of wordt voldaan aan UGT en BGT.

10.1.1 Overzicht

1. Verzamelen gegevens:

maatgevend moment (1 ^{ste} -orde)	\bar{M}_{y1}	staaf op twee steunpunten: in het midden uitkraging: bij de inklemming : bij berekening van n^* : absolute waarde kiezen
initiële uitbuiging in de 'zwakke' richting eventueel ook in de 'sterke' richting	staaf op twee steunpunten:	$\bar{v}_0 = k_{v0}L$
	uitkraging:	$\bar{v}_0 = \pi k_{v0}L$
statische doorsnede- grootheden	A b h I_y I_z I_{tor} W_y W_z enz.	te ontlenen aan mechanicaformules of tabellen
materiaal- eigenschappen	E G f_c f_m enz.	afhankelijk van materiaal
excentriciteit	e	positief in de richting van de belasting

2. Keuze (reductie)factoren afhankelijk van staaf-type en belasting:

geldigheidsgebied		alle doorsneden			alleen I-profiel		
factoren:		k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
herkomst factoren (Hoofdstuk of Bijlage) :		H5 / H6		H8	B3	H8	
staaf op twee steunpunten met:	constant moment	1,0	nvt	1,0		3,14	nvt
	gelijkmatig verdeelde belasting	0,88	0,81	0,88		2,55	nvt
	geconcentreerde last in het midden	0,73	0,87	0,73		2,00	nvt
	torsie-inklemming				5,5		
	gaffelopleggingen				1,0		
	doorgaand over meer steunpunten				1,0		
uitkraging met:	constant moment	1,0	nvt	1,0		1,0	nvt
	gelijkmatig verdeelde belasting	0,24	0,65	0,79		0,6	2,5
	geconcentreerde last in het midden	0,41	0,57	0,85		1,0	1,0
	gaffeloplegging					nvt	
	torsie-inklemming					1,0	

3. Benodigde componenten afhankelijk van staaf-type en belasting:

term	geldigheidsgebied / formules:	
F_{Ez}	staaf op twee steunpunten:	$F_{Ez} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$
	uitkraging:	$F_{Ez} = \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2}$
GI_t	algemeen:	$GI_t = GI_{tor} (1 + k_4 C_{tw})$
	rechthoekige doorsnede:	$C_{tw} = 0$ (verwaarloosbaar)
	I-profiel:	$C_{tw} = \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_{tor}} = \frac{\pi^2 EI_z h^2}{4L^2 GI_{tor}}$
M_{kip}	kritisch kipmoment:	$M_{kip}^2 = F_{Ez} GI_t$ of: $M_{kip} = \sqrt{F_{Ez} GI_t}$
n_z^*	ongesteunde staaf:	$\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{n_{zM}^*} + \frac{1}{n_{zF}^*}$
	momentcomponent:	$\frac{1}{n_{zM}^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kip}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}}$
	axiaalkrachtcomponent:	$\frac{1}{n_{zF}^*} = \frac{F_c}{F_{Ez}}$

vervolg n_z^*	combinaties van verschillende typen belasting invullen met juiste teken bij tegengestelde tekens rekenen met grootste veldmoment als ondergrens (bij $k_2 \bar{M}_{y2}$ factor k_2 zonder ondergrens)		$k_1 \bar{M}_{y1} = \sum k_{1,i} \bar{M}_{y1,i}$ en: $k_2 \bar{M}_{y2} = \sum k_{2,i} \bar{M}_{y2,i}$ $i = \text{geval 1, respectievelijk geval 2 enz.}$
	staaf op twee steunpunten met steunverband in de trekzone:		$\frac{1}{n_z^*} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1} + F_c \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2}}$
	uitkraging met steunverband in de trekzone		$\frac{1}{n_z^*} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1} + F_c \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} - \bar{M}_{y1} (k_1 - k_2)}$
n_y^*	indien gewent: overeenkomstig n_z^* (zonder momentcomponent)		$\frac{1}{n_y^*} = \frac{F_c}{F_{Ey}}$
\bar{M}_z	2 ^{de} -orde buigend moment		$\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez} \bar{v}_0}{k_3 (n_z^* - 1)}$
	1 ^{ste} -orde moment (indien aanwezig)		$\bar{M}_{z1;tot} = \bar{M}_{z1} \frac{n_z^*}{n_z^* - 1}$
$\bar{M}_{z2;fl}$	alleen bij I-profielen: 2 ^{de} -orde flensbuigingsmoment, op te nemen door: $W_{flz} = 0,5W_z$ dus $\bar{M}_{z2;fl}$ dubbel rekenen	staaf op twee steunpunten	$\bar{M}_{z2;fl} = \frac{F_{Ez} h}{4 \bar{M}_{y1}} \frac{n_z^*}{n_z^*} \bar{M}_{z2}$
		uitkraging	$\bar{M}_{z2;fl} = \frac{k_3 F_{Ez} h}{2 k_1 \bar{M}_{y1}} \frac{n_z^*}{n_{zM}^*} \left(\frac{1,4}{C_{tw}} + 1 \right) \bar{M}_{z2}$
totaal moment in de 'zwakke' richting:			$\bar{M}_{z;tot} = \bar{M}_{z2} + (\bar{M}_{z1;tot} + 2 \bar{M}_{z2;flz})$
\bar{M}_t	desgewent: torsiemoment	staaf op twee steunpunten:	$\bar{M}_t = k_5 \left(\bar{M}_{y1} - \frac{F_{Ez} e}{k_1 n_{zM}^*} \right) \frac{\bar{v}}{L}$
	bij de steunpunten op te nemen door W_{tor}	uitkraging:	$\bar{M}_t = k_5 \left(\bar{M}_{y1} - \frac{k_6 F_{Ez} e}{k_1 n_{zM}^*} \right) \frac{\bar{v}}{L}$

4. Toetsen:

UGT	staaf op twee steunpunten: maatgevend in het midden van de staaf		$\frac{F_c}{F_u} + \frac{\bar{M}_{y1}}{M_{uy}} + \frac{\bar{M}_{z;tot}}{M_{uz}} \leq 1$
	uitkraging: voldaan moet zijn aan beide toetsen: (in het veld en bij de inklemming)		$\frac{F_c}{F_u} + 0,7 \frac{\bar{M}_{y1}}{M_{uy}} + \frac{\bar{M}_{z2}}{M_{uz}} \leq 1$ $\frac{F_c}{F_u} + \frac{\bar{M}_{y1}}{M_{uy}} + \frac{\bar{M}_{z2;fl}}{0,5M_{uz}} \leq 1$
BGT	doorbuiging: n^* berekenen met belasting in de BGT	in de 'sterke' richting	$\bar{w} = (\bar{w}_0 + \bar{w}_1) \frac{n_y^*}{n_y^* - 1} \quad \text{met} \quad \frac{1}{n_y^*} = \frac{F_c}{F_{Ey}}$ $\bar{w} \leq \bar{w}_{\text{toelaatbaar}} \quad (= \text{meestal } 0,004 L)$
	(dus met aangepaste belastingfactoren, zie NEN 6702)	eventueel in de 'zwakke' richting	$\bar{v} = (\bar{v}_0 + \bar{v}_1) \frac{n_z^*}{n_z^* - 1}$ $\bar{v} \leq \bar{v}_{\text{toelaatbaar}} \quad (= \text{meestal } 0,004 L)$

Zie voor uitgebreide toelichtingen Hoofdstuk 8.

Voor andere belastingtypen zijn waarden voor k_1 te ontleen aan de literatuur, bijvoorbeeld NEN 9760 [42b] of [NEN6771 [42d] waar reciproque waarden worden gegeven.

Het is sterk aan te bevelen zorgvuldig aandacht te schenken aan de grootte van de term n_z^* .

Deze term dient niet alleen als gereedschap om de 2^{de}-orde effecten te berekenen maar kan ook worden beschouwd als 'alarmbel' om te waarschuwen tegen dreigende instabiliteit.

Bij waarden dicht in de buurt van 1 begint de stabiliteit van de constructie onbetrouwbaar te worden met kans op onevenredige toename van de vervormingen en de spanningen. Verlies van stabiliteit en bezwijken kan het gevolg zijn.

10.1.2 Rekenvoorbeelden

Omdat de voorgaande, complete lijst veel meer formules bevat dan nodig zijn voor een concrete situatie volgen twee voorbeelden van berekening van een staaf op twee steunpunten met gaffelondersteuning.

Beide voorbeelden bevatten een algemeen deel, dat moet worden uitgevoerd bij toepassing van welke methodiek dan ook en een (veel) korter deel dat specifiek gericht is op de in deze dissertatie ontwikkelde methode.

a Een houten balk belast met gelijkmatig verdeelde belasting en een axiale drukkracht

staaf lengte:	$L = 8$	[m]
staafdoorsneden:	$b = 0,125 \quad h = 0,625$	[m]
rekenbelastingen:		
q-belasting:	BGT: $q_z = 8$ UGT: $q_z = 10$	[kN/m]
axiale drukkracht:	$F_c = 48$ $F_c = 60$	[kN]
excentriciteit van de belasting:	$e = 0,625/2 = 0,313$	[m]
materiaalgegevens:	$E = 7,000 \times 10^6$ [kN/m ²] $G = 7/16 = 0,440 \times 10^6$ „	$f_c = f_m = 0,020 \times 10^6$ [kN/m ²]
statische grootheden:	I_y	$1/12 \times 0,125 \times 0,625^3 = 2543 \times 10^{-6}$ [m ⁴]
	I_z	$1/12 \times 0,125^3 \times 0,625 = 102 \times 10^{-6}$ „
	I_{tor}	$\frac{0,125^3 \times 0,625}{3} \left(1 - 0,63 \frac{0,125}{0,625} \right) = 356 \times 10^{-6}$ „
	I_w	kan worden verwaarloosd
	A	$0,125 \times 0,625 = 78125 \times 10^{-6}$ [m ²]
	W_y	$1/6 \times 0,125 \times 0,625^2 = 8138 \times 10^{-6}$ [m ³]
	W_z	$1/6 \times 0,125^2 \times 0,625 = 1628 \times 10^{-6}$ „
uiterste drukkracht:	$F_u = 0,020 \times 78125 = 1563$	[kN]
uiterste momenten:	$M_{yu} = 0,020 \times 8138 = 163$ $M_{zu} = 0,020 \times 1628 = 33$	[kNm] „
initiële uitbuiging:	$\bar{v}_0 = 8/500 = 0,016$	[m]
maximum moment:	BGT $\bar{M}_{y1} = 1/8 \times 8 \times 8^2 = 64$ UGT $\bar{M}_{y1} = 1/8 \times 10 \times 8^2 = 80$	[kNm] „
kniksterkte:	$F_{Ez} = \frac{\pi^2 \times 7 \cdot 10^6 \times 102 \cdot 10^{-6}}{8^2} = 110$	[kN]

torsiestijfheid:	$GI_t = GI_{tor} = 0,44 \times 356 = 156$	[kNm ²]
kipmoment:	$M_{kip} = \sqrt{110 \times 156} = 131$	[kNm]

Tot hier is de berekening niet anders dan gebruikelijk volgens de normen.

Nu volgt de 'NIEUWE BLIK OP KIP EN KNIK':

factoren:	$k_1 = 0,88$ $k_2 = 0,81$	[-]
2 ^{de} -orde term n_z^* :	$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{n_{zM}^*} = \frac{(0,88 \times 80)^2}{131^2 - 0,81 \times 80 \times 0,313 \times 110} = \frac{1}{3,02} \\ \frac{1}{n_{zF}^*} = \frac{60}{110} = \frac{1}{1,83} \end{array} \right.$	
N.B. gevaarlijk dicht bij de fatale waarde 1 !!!!! alarm !!!!	$\frac{1}{n_{zF}^*} = \frac{1}{3,02} + \frac{1}{1,83} = \frac{1}{1,14} \quad n_z^* = 1,14 \quad [-]$	
2 ^{de} -orde buigend moment:	$\bar{M}_{z2} = \frac{110 \times 0,016}{0,88(1,14 - 1)} = 14,3$	[kNm]
toets:	$\frac{60}{1563} + \frac{80}{163} + \frac{14,3}{33} = 0,04 + 0,49 + 0,43 = 0,96 < 1$	
N.B. Op papier voldoet dit weliswaar, maar door de bepaling van n_z^* is toch een waarschuwing ingebouwd dat deze constructie zich op de rand van labiliteit bevindt. De veiligheid lijkt dan wel 4 % te zijn, maar dat is maar zeer betrekkelijk.		
Bij een verhoging van de belasting met slechts 1 % wordt hier gevonden voor n_z^* :	$\frac{1}{n_{zF}^*} = \frac{(1,01)^2}{3,02} + \frac{1,01}{1,83} = \frac{1}{1,12}$	
en als toetsresultaat:	$(0,04 + 0,49) \times 1,01 + 0,43 \frac{1,14 - 1}{1,12 - 1} = 1,04 > 1$	
Dus: bij een toename van de 1 ^{ste} -orde belasting van 1 % stijgt:		
de 2 ^{de} -orde bijdrage met:	$\frac{1,14 - 1}{1,12 - 1} = \frac{0,14}{0,12} = 1,17 = 17 \%$	en
het toetsresultaat met:	$(1,04 - 0,96) \times 100\% = 8\%$.

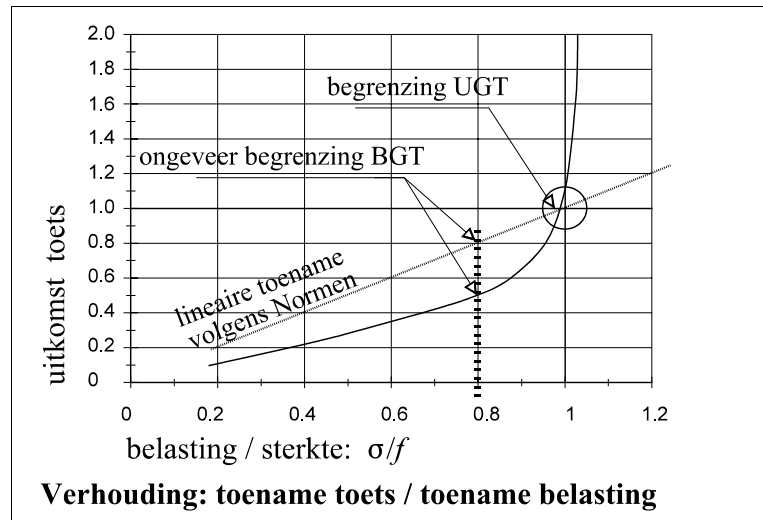
Gezien deze opvallende resultaten is nagegaan hoe het verloop van de uitkomst van de toets zich ontwikkelt bij toename van de belasting met steeds dezelfde verhouding tussen moment en drukkracht. De uitkomsten hiervan zijn weergegeven in figuur 10.1.

Uit de grafiek zijn de volgende conclusies te trekken:

- Bij geringe belasting geeft de berekening volgens een lineaire benadering een veilige uitkomst, maar dat is verder niet relevant.

- De uitkomst van de toets is progressief stijgend bij toenemende belasting, vooral bij nadering van de uiterste grenswaarde met $n_z^* = 1$.

- Het is daarom zeer gevaarlijk om de lineaire benadering toe te passen.



figuur 10.1

b Een stalen balk belast met een geconcentreerde last in het midden, aangrijpend op de bovenzijde van de balk

staaf lengte:	$L = 12$	[m]
profiel:	profiel: HE500A	
rekenbelastingen:		
eigen gewicht: 155 [kg/m]	$q_g = 1,55$	[kN/m]
variabel:	$F_z = 100$	[kN]
excentriciteit van de belasting:	$e = 0,5/2 = 0,25$	[m]
materiaalgegevens:	$E = 210 \times 10^6$ [kN/m ²] $G = 0,4 \times 210 = 84 \times 10^6$	$f_m = 0,235 \times 10^6$ [kN/m ²]
statische grootheden:	met Vuistregels [35]	uit Tabellen [44]
I_y	$0,021 \times 0,3 \times 0,5^3 = 788 \times 10^{-6}$	870×10^{-6} [m ⁴]
I_z	$0,007 \times 0,3^3 \times 0,5 = 95 \times 10^{-6}$	104×10^{-6} „
I_{tor}	$0,3 \times 0,5^3 / 18000 = 2,08 \times 10^{-6}$	$2,69 \times 10^{-6}$ „
I_w	$95 \times 10^{-6} \times 0,5^2 / 4 = 5,94 \times 10^{-6}$	$5,64 \times 10^{-6}$ [m ⁶]
W_y	$0,042 \times 0,3 \times 0,5^2 = 3150 \times 10^{-6}$	3949×10^{-6} [m ³]
W_z	$0,014 \times 0,3^2 \times 0,5 = 630 \times 10^{-6}$	691×10^{-6} „
Het voorbeeld wordt vervolgd met de waarden uit de Tabellen [44]		

uiterste momenten:		$M_{yu} = 0,235 \times 3949 = 928$	[kNm]
		$M_{yu2} = 0,235 \times 691 = 162$	„
initiële uitbuiging:		$\bar{v}_0 = 12 / 500 = 0,024$	[m]
maximum moment:	BGT	$\bar{M}_{y1} = \frac{1,55 \times 12^2}{8} + \frac{100 \times 12}{4} = 28 + 300 = 328$	[kNm]
	UGT	$\bar{M}_{y1} = 1,2 \times 28 + 1,5 \times 300 = 34 + 450 = 484$	„
kniksterkte:		$F_{Ez} = \frac{\pi^2 \times 210 \cdot 10^6 \times 104 \cdot 10^{-6}}{12^2} = 1497$	[kN]
torsiestijfheid:		$GI_{tor} = 84 \cdot 10^6 \times 2,69 \cdot 10^{-6} = 226$	[kNm ²]
toeslag:		$C_{iw} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 5,64}{12^2 \times 226} = 0,36$	[-]
effectieve torsiestijfheid:		$GI_t = 226(1 + 0,36) = 307$	[kNm ²]
kipmoment:		$M_{kip} = \sqrt{1497 \times 307} = 678$	[kNm]

Tot hier is de berekening niet anders dan gebruikelijk volgens de normen

Nu volgt de 'NIEUWE BLIK OP KIP EN KNIK':

factoren:	gebaseerd op F_z	gebaseerd op combinatie van belastingen, maar bij deze overwegende puntlast verandert er nauwelijks iets
	$k_1 = 0,73$ $k_2 = 0,87$	$k_1 = \frac{0,88 \times 34 + 0,73 \times 450}{484} = 0,74$ $k_2 = \frac{0 \times 34 + 0,87 \times 450}{484} = 0,81$
excentriciteit belasting:	$e = 0,25$	$e = \frac{0 \times 34 + 0,25 \times 450}{484} = 0,23$ [m]
2 ^{de} -orde term n_z^* :	$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,74 \times 484)^2}{678^2 - 0,81 \times 484 \times 0,23 \times 1497} = \frac{1}{2,54}$	
2 ^{de} -orde buigend moment:	$\bar{M}_{z2} = \frac{1497 \times 0,024}{0,74(2,54 - 1)} = 32$	[kNm]

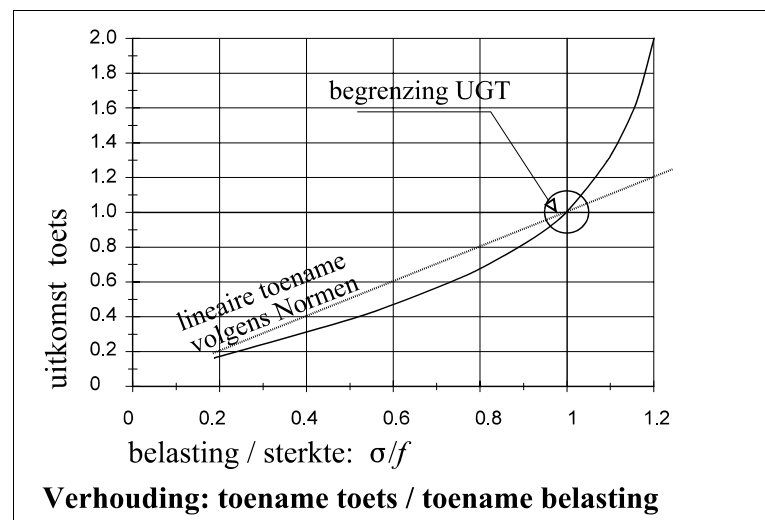
flensbuigingsmoment:	$\bar{M}_{z2;fl} = \frac{1497 \times 0,5}{4 \times 484} \times 32 = 12 \quad [\text{kNm}]$
<p>Zelden wordt aandacht besteed aan het flensbuigingsmoment $M_{z2;fl}$, dat zich ten opzichte van het 2^{de}-orde moment M_{z2} ongeveer verhoudt als de welvingsfactor C_{tw}. Dit moment moet worden opgenomen per flens, of wel: door het halve weerstandsmoment in de 'zwakke' richting. Dit betekent dat in feite de dubbele waarde in rekening moet worden gebracht; en dat is zeker niet verwaarloosbaar.</p>	
toets:	$\frac{484}{928} + \frac{32 + 2 \times 12}{162} = 0,52 + 0,20 + 0,15 = 0,87 < 1$
<p>Dit voldoet en de grootte van n_z^* is niet zeer alarmerend, maar wel aanzienlijk minder dan bij knikstabiliteit van raamwerken wenselijk is.</p>	

Ook bij deze staaf is nagegaan hoe het verloop van de uitkomst van de toets ten opzichte van de toename van de belasting zich ontwikkelt met constante verhouding tussen moment en drukkracht. De uitkomsten zijn weergegeven in figuur 10.2.

De grafiek toont dezelfde tendensen als in figuur 10.1.

- Bij geringe belasting geeft een berekening volgens een lineaire benadering een (niet relevante) veilige uitkomst.

- De uitkomst van de toets is hier minder progressief stijgend bij toenemende belasting, hetgeen bij dit voorbeeld wordt veroorzaakt door de geringere slankheid in de 'zwakke' richting.



figuur 10.2

- Desondanks geldt ook hier, evenals bij het vorige voorbeeld, dat het gevaarlijk is om de lineaire benadering toe te passen.

10.2 Conclusies

1. De in deze dissertatie ontwikkelde methode is gebaseerd op de elasticiteitsleer volgens de toegepaste mechanica. Daarom kan het stabiliteitsgedrag van draagconstructies uit alle materialen met lineair elastische eigenschappen op dezelfde wijze worden bepaald.
2. Zeer belangrijk is de 'alarmfunctie' die de ontwikkelde term n^* kan vervullen bij het beoordelen van het stabiliteitsgedrag van staven.
3. Deze mogelijkheid is weliswaar niet onbekend, maar komt bij bepalingen over kipstabiliteit in de geraadpleegde normen niet voor. Bij toenemende belasting tot dicht bij de kritische waarde kan plotseling verlies van stabiliteit (en bezwijken van de constructie) optreden. Daarom is 'argeloze' toepassing van de lineaire toetsregels volgens deze normen gevaarlijk.
4. Ondanks de zeer grote verschillen waarmee kip- en knikgevallen in de, voor de materialen hout, staal en beton, geldende normen worden behandeld, is het opmerkelijk dat zij allen op dezelfde manier, met toepassing van de hier geïntroduceerde term(en) n_z^* en/of n_y^* , kunnen worden berekend, met nagenoeg dezelfde resultaten als de uitkomsten volgens de vergeleken normen.
5. Nieuw is dus dat bij het beoordelen van de knik- en kipstabiliteit dezelfde methodiek, zoals ontwikkeld in deze dissertatie, toepasbaar is voor alle gangbare materialen voor draagconstructies.

10.3 Aanbevelingen

1. Bij de periodiek herziening van de Nederlandse normen en de Eurocodes zou voor alle materialen hetzelfde berekeningssysteem kunnen worden toegepast voor de toetsingsregels betreffende de stabiliteit, stijfheid en sterkte van op buiging en/of op druk belaste staven.
2. Voor ruimere toepassing dan de hier bestudeerde staftypen moet worden bestudeerd welke aanpassingen nodig zijn bij:
 - andere dan rechte, prismatische staven, zoals bijvoorbeeld gebogen en/of taps verlopende staven,
 - staven met andere dan dubbelsymmetrische, rechthoekige of *I*-vormige doorsneden, zoals bijvoorbeeld *T*-, *L*- en *U*-profielen, spanten met samengestelde doorsneden en ook gescheurde betondoorsneden,
 - materialen waarvoor de elasticiteitstheorie niet van toepassing is,
 - het eventueel in rekening brengen van plastisch gedrag van de constructie.

Hoofdstuk **11** Literatuuroverzicht

Over de met * gemerkte publicaties is in Bijlage 1 enige extra informatie opgenomen, variërend van een beknopte karakteristiek van het werk tot uittreksels van onderdelen, soms met nadere uitwerkingen, vergelijkingen met andere bronnen en/of commentaar.

- [1] Musschenbroek, P. van,
Introductio ad cohaerentiam corporum firmorum.
Leiden, 1729

- [2] Euler, L.,
De curvis elasticis.
Lausanne en Geneve, 1744

ook: Sur la force de colonnes
Memoires de l'academie de Berlin, 1759

- [3] Prandtl, L.,
Kipperscheinungen. Ein Fall von instabilen elastischem Gleichgewicht.
Nürnberg, Universität München, 1899

- [4] Tetmajer, L. von,
Die Gesetze der Knickung - unter zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch
wichtigsten Baustoffe.
Leipzig, 1903

- [5] Wagner, H.,
Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, 25 Jahre TH Danzig.
Danzig, 1929

- [6a] * Timoshenko, S.,
Theory of elastic stability.
New York, 1936

- [6b] * Timoshenko, S.P. en Gere, J.M.,
Theory of elastic stability.
New York, 1961

-
- [10] * Chen, W.F., Atsuta, T.,
Theory of beam-columns, vol 2. Space behavior and design.
New York 1977
- [11] * Vandepitte, D.,
Berekening van constructies; bouwkunde en civiele techniek, 3 delen.
Gent, 1979, 1980, 1982
- [12] * Bouma, A.L.,
Mechanica van constructies, elasto-statica van slanke structuren.
Delft, 1989
- [13] * Blaauwendraad J.,
Elasticiteitstheorie, collegedictaat CT5141.
Delft, 2001
- [14a] * Dicke, D.,
Stabiliteit voor ontwerpers.
Delft, 1991
- [14b] Dicke, D.,
Diverse artikelen over stabiliteit in het blad Cement.
jaargang 1961-1972
- [15] * Blass, H.J. et al.,
STEP (Structural Timber Education Programme) Timber engineering.
Almere, Centrum Hout, 1995
- [16] * Blass, H.J.,
Tragfähigkeit von Druckstäben aus Brettschichtholz unter Berücksichtigung
streuender Einflussgrößen., dissertatie.
Karlsruhe, 1987
- [17] * Brüninghoff, H.,
Spannungen und Stabilität bei quergestützten Brettschichträgern, dissertatie.
Karlsruhe, 1972
- [18] Werkgroep 'Op druk en buiging belaste kolommen',
Stabiliteit voor de staalconstructeur.
Zoetermeer, 2004, herdruk
- [19] * Bartels, D. en Bos, C.A.M.,
Kipstabiliteit van stalen liggers.
Amsterdam/Brussel, 1973

-
- [20] Thompson, J.M.T. en Hunt, G.W.,
A general theory of elastic stability.
London , 1973
- [21] * Padmoes, D.A.,
Flexural-torsional buckling of timber portal frames, dissertatie.
Eindhoven, 1990
- [22] * Put, T.C.A.M. van der,
Stabiliteit van liggers (achtergrond TGB) in PAO cursus.
Delft 1992
- [23] * Trahair, N.S.,
Flexural-torsional buckling of structures.
London, 1993
- [24a] * Lohse, G.,
Kippen.
Düsseldorf , 1997.
- [24b] * Lohse, G.,
Einführung in das Knicken und Kippen.
Düsseldorf, 1994
- [25] Trahair, N.S. en Nethercot, D.A.,
Bracing requirements in thin-walled structures (hoofdstuk 3 in) Developments in
thin-walled structures, Vol. 2.
London, 1984
- [26] Schmidt J.S.,
Näherungsweise Berechnung der Traglasten von gabelgelagerten I-Trägern mit
diskreter mittiger Drehhalterung unter Berücksichtigung wirklicherkeitsnaher
Lasteneinleittung, dissertatie.
Berlin, 1982 T.U.
- [27] Wienecke, U.J.,
Zur wirklichkeitsnahen Berechnung von Stahlbeton- und Spannbetonstäben nach
einer consequenten Theorie II. Ordnung unter allegemeine Belastung, dissertatie.
Darmstad, 1985
- [28] * Pauli, W.,
Versuche zur Kippstabilität an praxisgerechten Fertigteilträgern aus Stahlbeton und
Spannbeton, dissertatie.
Darmstadt, 1990

-
- [29] * Erp, G.M. van,
Advanced buckling analyses of beams with arbitrary cross sections, dissertatie.
Eindhoven, 1989
- [30] * Hiemstra, P.,
Voorstel stabiliteitscontrole op prismatische houten liggers met een rechthoekige
dwarsdoorsnede.
Eindhoven, 2000
- [31] * Eggen, T.E.,
Buckling and geometrical nonlinear beam-type analyses of timber structures,
dissertatie.
Trondheim, 2000
- [32] Trahair, N.S., Bradford, M.A. en Nethercot, D.A.,
The behaviour and design of steel structures to BS5950.
London, 2001
- [33] Nethercot, David A.,
Limit states design of structural steelwork.
New York, 2001
- [34] Werkgroep C van de Vereniging van houtconstructeurs,
Driescharnierspanten.
Arnhem, 2003
- [35] * Raven, W.J.,
Vuistregels, collegedictaat CT3211 / CT4281 / CT2051 / CT3051.
Delft, 2003
- [36] * Hoogenboom, P.C.J. en Haug, N.,
Kip van houten liggers.
Delft, 2005
- [37] Hoogenboom, P.C.J. en Borgart, A.,
Method for including restrained warping in traditional frame analyses,
artikel in Heron, vol. 50, no. 1.
Delft, 2005
- [38] Brüninghoff, H. en Klapp, H.
Stabilitätsnachweis im Holzbau - Biegedrillknicken mit Normalkraft,
artikel in 'Bauen mit Holz', 10/2005.
Karlsruhe, 2005

- [39] * Raven, W.J.,
Van knikken en kippen tot buigen en barsten,
artikel in 'de Houtconstructeur' jg.8, nr. 27.
Arnhem 2001

Normen

- [40] NEN 1055 Technische grondslagen voor bouwvoorschriften,
TGB 1949 en TGB 1955.
Nederlandse norm, 1^{ste} druk 1949 en gewijzigde 2^{de} druk 1955
- [41] NEN 3850 (en ook volgende nummers) Technische grondslagen voor de berekening
bouwconstructies TGB 1972.
Nederlandse normen 1972
- [42] NEN 6700 TGB 1990 Technische grondslagen voor bouwconstructies
waarin:
- [42a] NEN 6702 Belastingen en vervormingen,
[42b] * NEN 6760 Houtconstructies,
[42c] * NEN 6770 Staalconstructies - algemeen,
[42d] * NEN 6771 Staalconstructies - stabiliteit,
[42^e] NEN 6720 Voorschriften beton.
Nederlandse normen 1992 met herdrukken van gedeelten tot en met 2005
- [43] * Eurocode EC5, Design of timber structures
prEN 1995:2001.

Tabellen en formules

- [44] * Staalprofielen, tabellenboek Staalcentrum Nederland.
Amsterdam, 1980
- [45] * Stamme, P.,
Kipsicherheitsnachweis. Tabellenbuch.
Düsseldorf, 1981
- [46] * Young, W.C.,
Roark's formulas for stress and strain.
New York, 1989.
- [47] * Raven, W.J. et al,
Houtconstructies voor het HTO en HBO+, deel 4, tabellen en grafieken.
Almere, Centrum Hout, 2001

NIEUWE BLIK OP KIP EN KNIK

BIJLAGEN

Bijlage

1

Literatuurverkenning

Van enkele geraadpleegde publicaties volgen hier enige relevante gegevens of uitwerkingen. Om vergelijking mogelijk te maken zijn de overgenomen formules omgewerkt in de notaties van Hoofdstuk 3.2 van deze dissertatie.

[6a] Timoshenko, S.,
Theory of elastic stability, (1^{ste} druk)
 New York, 1936

In dit - van ouds gezaghebbende - standaardwerk wordt uitgebreid aandacht besteed aan knik, al dan niet gecombineerd met dwarsbelasting, echter allemaal 'in plane' dus in de sterke richting.

Kip komt daar aan de orde in Hoofdstuk 5 Lateral buckling of beams, waar de volgende onderwerpen worden behandeld:

a Rechthoekige balk vrij opgelegd op 2 steunpunten met gaffeloplegging

Hiervoor wordt afgeleid het kritisch kipmoment:

$$M_{kip} = \frac{\pi\sqrt{B_1C}}{L} \quad \text{met daarin: } B_1 = \frac{hb^3}{12}E \quad \text{en} \quad C = \frac{hb^3}{3} \left(1 - 0,63\frac{b}{h}\right)G$$

Dit komt overeen met:
$$M_{kip} = \frac{\pi\sqrt{EI_zGI_{tor}}}{L}$$

Voor een combinatie van een constant moment met een axiale drukkracht wordt afgeleid:

$$\frac{M_{y1}^2}{B_1C} \left(1 + \frac{F_c C}{M_y^2}\right) = \frac{\pi^2}{L^2} \quad \text{wat herkenbaarder geschreven kan worden als: } \frac{M_{y1}^2}{M_{kip}^2} + \frac{F_c}{F_{Ez}} = 1$$

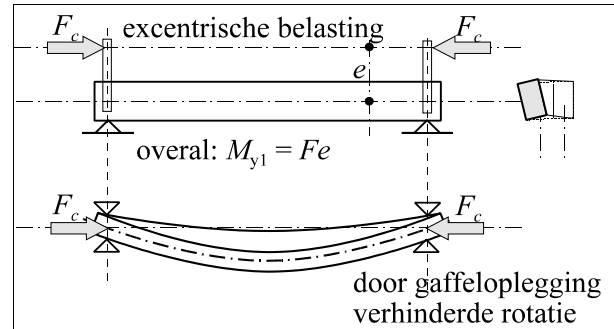
b Constante verhouding tussen axiale drukkracht en moment

Deze paragraaf geeft een wat geforceerde poging om bij een constante verhouding tussen M_{y1} en F_c (zie figuur B1.1), een kritisch moment M_{cr} respectievelijk een kritische drukkracht F_{cr} af te leiden.

Met: $\frac{M_{y1}}{F_c} = \frac{M_{cr}}{F_{cr}} = e$ geldt dan:

$$\frac{M_{cr}^2}{M_{kip}^2} + \frac{M_{cr}}{eF_{Ez}} = 1 \quad \text{respectievelijk:}$$

$$\frac{(F_{cr}e)^2}{M_{kip}^2} + \frac{F_{cr}}{F_{Ez}} = 1$$



figuur B1.1

Voor zeer grote e (en dus kleine F_c) wordt gesteld dat M_{cr} kan naderen tot M_{kip} en voor zeer kleine e (en dus kleine M_{y1}) wordt gesteld dat F_{cr} kan naderen tot F_{Ez} .

T. definieert dan als kritische waarden: $M_{cr} = \frac{M_{kip}}{\sqrt{1 + \frac{C}{M_{kip}e}}}$ en: $F_{cr} = \frac{F_{Ez}}{1 + \frac{F_{Ez}e^2}{C}}$

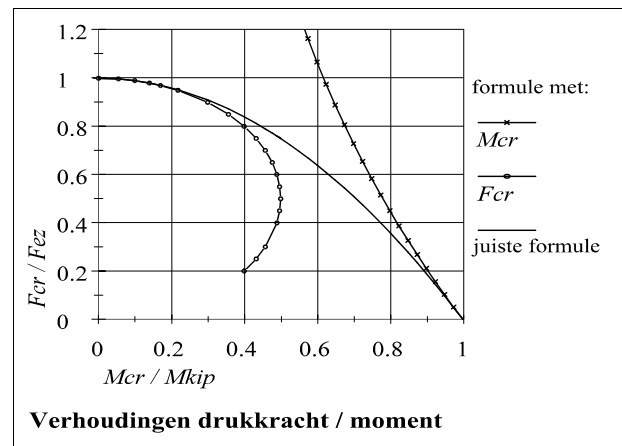
In figuur B1.2 zijn uitgezet:

- de uit deze twee formules volgende verhoudingen tussen: F_{cr}/F_{Ez} en de bijbehorende: M_{cr}/M_{kip} .
- (ter vergelijking) het parabolisch verloop van de juiste waarden, die zeer eenvoudig gevonden kunnen worden met:

$$M_{cr} = M_{kip} \sqrt{1 - \frac{F_c}{F_{Ez}}}$$

is overeenkomstig:

$$F_{cr} = F_{Ez} \left(1 - \frac{M_y^2}{M_{kip}^2} \right)$$



figuur B1.2

T.'s conclusies, dat bij aanwezigheid van een axiale kracht het kritisch moment M_{cr} kleiner wordt dan het kipmoment en omgekeerd dat de kniksterkte bij aanwezigheid van een moment kleiner wordt dan de Eulerse knikkracht, zijn kwalitatief juist, maar opvallend is dat hij de

voor de hand liggende oplossing met een vierkantsvergelijking (met als resultaat een parabolisch verloop) niet gebruikt. In de figuur is te zien dat zijn uitkomsten alleen redelijk nauwkeurig zijn voor de twee uiterste gevallen bij een:

1. groot moment M_{cr} en dus kleine drukkracht F_{cr} (volgens de eerste formule (met M_{cr}),
2. grote drukkracht F_{cr} en dus een klein moment M_y (volgens de tweede formule met F_{cr}).

Overigens komt deze merkwaardige passage in de 2^{de} druk (1961) niet meer voor.

c Belastingen door een constant moment al dan niet gecombineerd met en axiale kracht.

Voor dit belastinggeval bestaat een eenvoudige wiskundig-analytische oplossing van de gehanteerde differentiaalvergelijking (hierna verkort aan te duiden met d.v.). De uitwijkingen in de zwakke richting en de rotaties om de staafas verlopen dan sinusvormig.

Voor alle overige belastinggevallen wordt wel de opzet van de d.v.'s gegeven, maar hiervoor zijn geen eenvoudige, elegante wiskundige oplossingen te bieden. Gebruik wordt nu gemaakt van reeksontwikkeling (Besselfuncties).

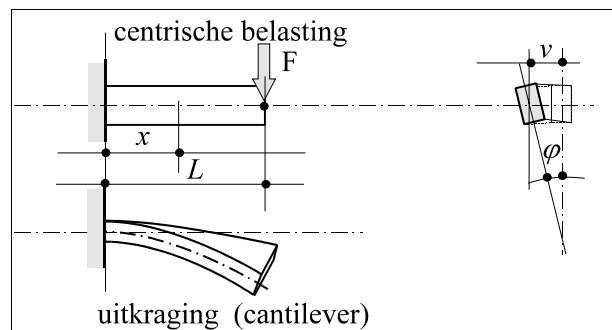
d Een uitkraging belast met een puntlast op het eind zonder axiale drukkracht

Voor dit belastinggeval (zie figuur B1.3) worden de volgende d.v.'s afgeleid:

$$EI_y w'' = -M_y = -F(L-x)$$

$$EI_z v'' = -M_z = -\varphi M_y = -\varphi F(L-x)$$

$$GI_{tor} \varphi' = M_t = F(L-x)v' - F(\bar{v} - v)$$



figuur B1.3

T. gaat er van uit dat buiging in de sterke richting geen invloed heeft op het kipedrag. Dus de tweede en de derde d.v. beïnvloeden elkaar maar de eerste d.v. is daarvan onafhankelijk, zodat er dus twee (aan elkaar) gekoppelde d.v.'s overblijven.

Door de derde d.v. te differentiëren, en v'' uit de tweede d.v. in te vullen is v te elimineren:

$$EI_z v'' = -\varphi F(L-x)$$

$$GI_{tor} \varphi'' = F\{(L-x)v'' - v'\} + Fv' = F(L-x)v'' = -\frac{\varphi F^2 (L-x)^2}{EI_z}$$

Met: $K^2 = \frac{F^2}{EI_z GI_{tor}}$ en: $p = L-x$ is dit korter te schrijven als: $\varphi'' + K^2 p^2 \varphi = 0$

Deze vergelijking is analytisch niet op te lossen. Wel is, ten koste van veel rekenwerk, een numerieke oplossing mogelijk door φ te beschouwen als een machtreeks van p :

$$\begin{aligned}\varphi &= a + bp + cp^2 + dp^3 + ep^4 + fp^5 + gp^6 + hp^7 + \dots \\ \varphi'' &= 2c + 2 \cdot 3d \cdot p + 3 \cdot 4ep^2 + 4 \cdot 5fp^3 + 5 \cdot 6gp^4 + 6 \cdot 7hp^5 + \dots\end{aligned}$$

wat gecombineerd wordt tot één reeks met termen in p :

$$\begin{aligned}2c + 2 \cdot 3dp + (3 \cdot 4e + K^2a)p^2 + (4 \cdot 5f + K^2b)p^3 + (5 \cdot 6g + K^2c)p^4 + \\ + (6 \cdot 7h + K^2d)p^5 + (7 \cdot 8i + K^2e)p^6 + \dots = 0\end{aligned}$$

Aan de d.v. wordt voldaan als bij elke macht van p het resultaat nul is, dus:

$$\begin{aligned}c &= d = 0 \\ K^2a + 3 \cdot 4e &= 0 \quad \text{dus } e = -K^2a/3 \cdot 4 \\ K^2b + 4 \cdot 5f &= 0 \quad \text{dus } f = -K^2b/4 \cdot 5 \\ K^2e + 7 \cdot 8i &= 0 \quad \text{dus } i = -K^2e/7 \cdot 8 = +K^4a/3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \\ K^2f + 8 \cdot 9j &= 0 \quad \text{dus } j = -K^2f/8 \cdot 9 = +K^4b/4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \quad \text{enz.}\end{aligned}$$

De oplossing is dan:

$$\begin{aligned}\varphi &= a + bp + 0 + 0 + ep^4 + fp^5 + ip^8 + jp^9 + \dots = \\ &= a + bp - \frac{K^2a}{3 \cdot 4} p^4 - \frac{K^2b}{4 \cdot 5} p^5 + \frac{K^4a}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} p^8 + \frac{K^4b}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} p^9 + \dots = \\ &= a \left(1 - \frac{(Kp^2)^2}{3 \cdot 4} + \frac{(Kp^2)^4}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \dots \right) + bp \left(-1 + \frac{(Kp^2)^2}{4 \cdot 5} - \frac{(Kp^2)^2}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} + \dots \right)\end{aligned}$$

Afhankelijk van de randvoorwaarden is dit verder op te lossen.

Voor een uitkraging geldt bij het staafeind (waar F aangrijpt): $x = L$, $p = 0$, $M_t = 0$, $\varphi = 0$. Hieraan kan alleen worden voldaan als: $b = 0$. Bij de inklemming geldt: $x = 0$, $p = L$, $\varphi = 0$. Er moet dus een waarde voor $Kp^2 = KL^2$ gevonden worden waarvoor geldt:

$$\varphi_0 = a \left(1 - \frac{(KL^2)^2}{3 \cdot 4} + \frac{(KL^2)^4}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{(KL^2)^6}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \frac{(KL^2)^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 16} + \dots \right) = 0$$

T. maakt gebruik van een tabel uit 1909 van L.Prandtl en vindt: $kL^2 = 4,013$
 Met de 'terugrekenfunctie' van een spreadsheet is dit eenvoudig te controleren met als resultaat de waarden in de volgende tabel.

aantal in rekening te brengen variabele termen van de reeks	2	3	4	5	6
resultaat voor KL^2	4,1733	4,0041	4,0130	4,0126	4,0126

N.B. Hier past zeker groot respect voor het geduld en de nauwkeurigheid van de oude rekenmeesters zonder computers.

De uitkomst van het betreffende belastinggeval is dus: $KL^2 = \frac{F_{kr} L^2}{\sqrt{EI_z GI_{tor}}} = 4,013$

$$\text{of: } M_{cr} = F_{kr} L = \frac{4,013 \sqrt{EI_z GI_{tor}}}{L} = \frac{\pi \sqrt{EI_z GI_{tor}}}{0,39 \cdot 2L} = \frac{M_{kip}}{0,39}$$

Voor een gelijkmatig verdeelde belasting vindt T.: $q_{cr} = \frac{12,85 \sqrt{EI_z GI_{tor}}}{L^3}$

met als bijbehorend moment:

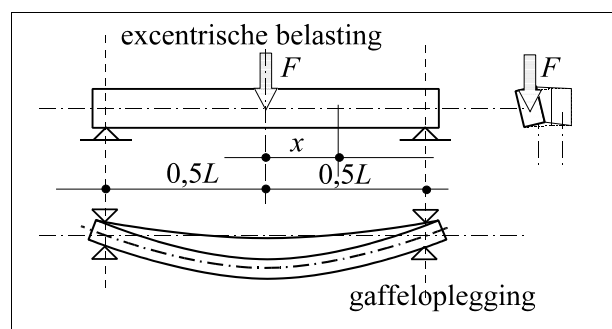
$$M_{cr} = \frac{q_{cr} L^2}{2} = \frac{6,425 \sqrt{EI_z GI_{tor}}}{L} = \frac{2,045 \pi \sqrt{EI_z GI_{tor}}}{0,24 \cdot 2L} = \frac{M_{kip}}{0,24}$$

e Tweezijdig vrij - op gaffels - opgelegde liggers, zonder axiale drukkracht

De analyse van dit belastinggeval (zie figuur B1.4) biedt een vergelijkbare opzet, waarbij het volgende paar gekoppelde d.v.'s wordt afgeleid:

$$EI_z v'' = -M_z = +\varphi \cdot 0,5F(0,5L - x)$$

$$GI_{tor} \varphi' = M_t = -0,5F \left\{ \begin{array}{l} (0,5L - x)v' + \\ +(v - \bar{v}) \end{array} \right\}$$



figuur B1.4

Overeenkomstig de gang van zaken als bij een uitkraging vindt T. nu als d.v.:

$$GI_{tor}\varphi'' + \frac{\varphi F^2 (0,5L - x)^2}{4EI_z} = 0 \quad \text{met als oplossing: } F_{kr} = \frac{16,93\sqrt{EI_z GI_{tor}}}{L^2}$$

$$\text{waaruit volgt: } M_{kr} = \frac{F_{kr}L}{4} = \frac{4,233\sqrt{EI_z GI_{tor}}}{L} = \frac{\pi\sqrt{EI_z GI_{tor}}}{1,35L} = \frac{M_{kip}}{1,35}$$

Vervolgens wordt een tabel met oplossingen gepresenteerd voor gevallen waarbij de puntlast niet in het midden aangrijpt.

Voor een gelijkmatig verdeelde belasting wordt gevonden:

$$q_{kr} = \frac{28,3\sqrt{EI_z GI_{tor}}}{L^3} \quad \text{waaruit } M_{kr} = \frac{q_{kr}L^2}{8} = \frac{3,538\sqrt{EI_z GI_{tor}}}{L} = \frac{\pi\sqrt{EI_z GI_{tor}}}{0,89L} = \frac{M_{kip}}{0,89}$$

f Vergelijkende uitkomsten

De voorgaande waarden worden in de bestudeerde literatuur door meer auteurs gevonden, zoals Padmoes [21], respectievelijk overgenomen, zoals Roark [46] en Vandepitte [11].

Ter vergelijking kan worden geschreven: $M_{kr} = \frac{\gamma}{L}\sqrt{EI_z GI_{tor}}$

Toepassing van de normen NEN6760 (TGB-1990- hout) 11.14. en bijlage C. en NEN6771 (TGB-1990- staal-stabliteit) 12.2.5.3 tabel 9, EC5 - Design of timber structures -6.33 tabel 6-1 en de resultaten van deze dissertatie (Rv) leiden tot goed vergelijkbare waarden, zoals blijkt uit het volgende overzicht:

waarden van γ in: $M_{kr} = \frac{\gamma}{L}\sqrt{EI_z GI_{tor}}$	uitkraging					op 2 steunpunten				
	Tim	TGB staal	TGB hout	EC5	Rv	Tim	TGB staal	TGB hout	EC5	Rv
puntlast	4,01	4,02	4,19	3,93	4,04	4,23	4,24	4,19	3,93*	4,30
gelijkmatig verdeelde belasting	6,43	6,44	5,39*	6,28	6,54	3,54	3,55	3,42	3,49	3,57

De met * aangeduide waarden geven afwijkingen van 10% of meer.

g Torsie van staven met I-profielen

Tenslotte wijdt T. enkele paragrafen aan het onderwerp verhinderde welving. Wanneer bij een of meer oplegpunten welving van de doorsnede wordt verhinderd leidt dat tot een vergroting van de torsiestijfheid.

Bij een sinusvormige rotatielijns (zoals bij een constant moment) is de welvingslijn, als 2^{de} afgeleide hiervan, ook een sinuslijn. Hierdoor is de d.v. zeer fraai wiskundig op te lossen. Het kritisch kippmoment wordt dan vergroot met een constante factor:

$\sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_{tor}}}$ wat overeenkomt met de in deze Bijlage 3 afgeleide vergroting van de

torsiestijfheid met de factor: $\sqrt{1 + C_{tw}}$ waarin: $C_{tw} = \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_{tor}}$.

h Conclusie

Afgezien van veel nadere uitwerkingen biedt T. in de eerste druk van 'Theory of elastic stability' vooral een analyse van het kritisch kippmoment in de uiterste grenstoestand. Dit is vergelijkbaar met de bepaling van de kritische knikbelasting volgens de formule van Euler. Onbesproken blijven: de werkelijk optredende vervormingen en spanningen en de toetsing daarvan, de relatie met imperfecties en evenmin de combinatie van buiging en axiaalkracht, althans niet de combinatie knik en kip.

Aan knik in de sterke richting wordt overigens wel bijzonder veel aandacht besteed.

**[6b] Timoshenko, S.P. en Gere, J.M.,
Theory of elastic stability, (2^{de} druk)
New York, 1961**

Evenals in [6a], de druk uit 1936, wordt hier veel aandacht besteed aan knik enz. Nu is er ook een apart hoofdstuk over 'torsional buckling', dus de combinatie van torsie en kip, inclusief (verhinderde) welving. Op zich is dat wel overzichtelijker dan in [6a], maar het biedt verder geen extra te gebruiken informatie voor het onderwerp van deze dissertatie.

Het hoofdstuk over 'lateral buckling of beams' is daardoor beknopter dan in [6a]. Weggelaten is nu de merkwaardige en bij nader inzien overbodige exercitie zoals hiervoor beschreven onder [6a] - 2. Uitgebreider wordt voor meer belastinggevallen ingegaan op de kritische kippbelasting met als algemene formule:

$$F_{cr} \text{ of } (qL)_{cr} = \gamma \frac{\sqrt{EI_z GI_{tor}}}{L^2}$$

Toegevoegd zijn tabellen met waarden voor γ bij diverse gevallen (waarbij verhinderde welving in rekening wordt gebracht) met varianten in de plaats van het aangrijpingspunt van de belasting: in het midden van de balkdoorsnede, respectievelijk op de bovenzijde of aan de onderzijde. Medegedeeld wordt dat deze getallen zijn ontleend aan reeksontwikkeling. Bij de bespreking van de eerste druk [6a] is al aangegeven hoe deze reeksen zijn opgezet en uitgewerkt.

Voor de belasting door een puntlast in het staafmidden van een balk met I-profiel zijn de waarden van de factor γ (blz. 264, tabel 6-5) vergeleken met de berekende waarden volgens de methodiek van deze dissertatie (Rv).

De resultaten zijn voor drie posities van de puntlast (aan de onderflens: $e/h = +0,5$, in het midden: $e/h = 0$ en op de bovenflens: $e/h = -0,5$) weergegeven in de grafiek van figuur B1.5.

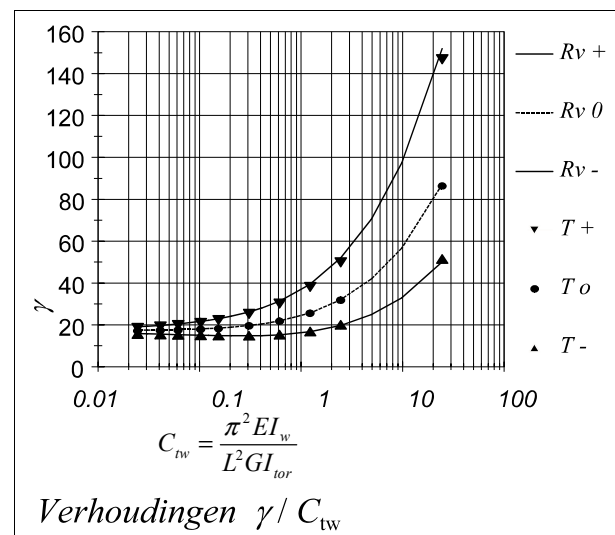
Uitgezet zijn:

- Op de horizontale as: de factor waarin de vergroting van de torsiestijfheid door de verhinderde welving is uitgedrukt:

$$C_{tw} = \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_{tor}}$$

De tabel van T. geeft van deze factor (zonder π^2) de reciproque waarden van 0,4 tot 400.

De bijbehorende staalprofielen hebben daarbij een lengte/breedte verhouding van ongeveer 4 tot 130.



figuur B1.5

- Op de verticale as: de factor γ .

Te zien is dat de door T. berekende punten nagenoeg samenvallen met de voor deze dissertatie berekende lijnen.

De verhinderde welving kan voor zeer korte, brede staven een aanzienlijke vergroting van het draagvermogen opleveren, maar heeft voor zeer slanke staven nauwelijks invloed. In Bijlage B3 wordt dit nader uitgewerkt.

Ter indicatie volgt nog een rekenvoorbeeld:

Stalen balk: vrij opgelegd op 2 steunpunten: $L = 4,500$ m profiel: IPE 200

Te berekenen: de kritische waarde van een puntlast in het staafmidden geplaatst op de bovenflens.

Statische gegevens profieldoorsnede ontleend aan Staaltabellen [44].

$$\frac{EI_w}{L^2 GI_{tor}} = \frac{I_w}{0,4L^2 I_t} = \frac{12988 \cdot 10^6}{0,4 \times 4500^2 \times 51654} = \frac{1}{32,2} \quad \text{en: } C_{tw} = \frac{\pi^2}{32,2} = 0,31$$

In tabel 6-5 van T. wordt hierbij afgelezen: $\gamma = 14,9$

De kritische belasting is dan:

$$F_{kr} = \gamma \frac{\sqrt{EI_z GI_{tor}}}{L^2} = 14,9 \frac{\sqrt{210000 \times 142 \times 10^4 \times 84000 \times 5,2 \times 10^4}}{4500^2} = 26488 \text{ N}$$

$$M_{y1;cr} = 0,25 \cdot 26,49 \cdot 4,5 = 29,8 \text{ kNm}$$

$$\text{Met bijbehorende spanning: } \sigma_{my} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{26488 \times 4500}{4 \times 194317} = 153 \text{ [N/mm}^2 \text{]}$$

Ter vergelijking: berekening met n_z^* ,

Na enig proberen gevonden: $F_{kr} = 26,1$ kN waaruit: $M_{y1;cr} = 29,36$ kNm.

$$F_{Ez} = \frac{\pi^2 \cdot 210000 \cdot 1420000}{4500^2} = 145339 \text{ N} = 145 \text{ kN}$$

$$GI_t = 84000 \cdot 5,2 \cdot 10^4 (1 + 0,31) = 5,72 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2 = 5,72 \text{ kNm}^2$$

controle met formule (5.50) zie Hoofdstuk 5.1.3:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1 M_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 M_{y1} e F_{Ez}} = \frac{(0,73 \cdot 29,36)^2}{145 \cdot 5,72 - 0,87 \cdot 29,36 \cdot 0,100 \cdot 145} = \frac{459}{459} = 1$$

Het verschil in gevonden kritische belasting is: $26,49/26,1 = 1,015$ dus: 1,5%.

Duidelijk is dat in dit (willekeurige) geval niet de sterkte, maar de stabiliteit maatgevend is. Aan T. is overigens niet te ontleen welke extra momenten en buigspanningen in de 'zwakke' richting hier nog bij komen en welke 2^{de}-orde vergrotingen optreden.

Voor enkele andere gevallen, zoals staven met kipsteun in het midden van de overspanning of ingeklemde steunpunten, zijn tabellen opgenomen met μ -coëfficiënten om de kritische belasting te kunnen bepalen. Ook worden nog voor enkele profielverhoudingen een tabel en een grafiek gegeven met kritische spanningen.

Conclusie: Ook in de 2^{de} druk biedt T. niets meer (of minder) dan de kritische kipbelasting voor liggers (zonder axiale drukkracht) voor een aantal wat verder uitgewerkte belastinggevallen.

Er zijn weinig aanknopingspunten voor andere situaties en ook niet voor toetsing van de combinatie van kip- en knikstabiliteit.

**[10] Chen, W.F., Atsuta, T.,
Theory of beam-columns, vol 2: Space behavior and design
New York, 1977**

Dit werk bevat een zeer fundamentele studie over dubbele buiging en torsie van (in principe) dunwandige staven, met uitgebreide formules voor buiging en torsie in een efficiënte notatie. Afgeleid worden 3 universele d.v.'s voor de relatie tussen:

1. buiging om de y -as (in de sterke richting) met verplaatsingen w
2. buiging om de z -as (in de zwakke richting) met verplaatsingen v
3. rotatie om de x -as (in de langsrichting) met rotaties ϕ

N.B. Om te kunnen vergelijken worden de indices voor assen en verplaatsingen genoteerd in overeenstemming met Hoofdstuk 3.2 van deze dissertatie.

Ch. en A. leiden allereerst drie fundamentele d.v.'s (2.176) af voor rechte staven met dubbelsymmetrische doorsnede:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & EI_y w'' + Fw + M_y + \phi M_z - v' M_x = 0 \\
 2. \quad & EI_z v'' + Fv - M_z + \phi M_y + w' M_x = 0 \\
 3. \quad & EI_w \phi'' - (GI_t + K)\phi + v' M_y + w' M_z + M_x - w M_z - v M_y = 0
 \end{aligned}$$

Wanneer er (gelijkmatig) verdeelde belastingen q_y, q_z of torsiemomenten m_x (langs de x -as) optreden, volgen na tweemaal respectievelijk eenmaal differentieren de d.v.'s (2.179a):

$$\begin{aligned}
 1a. \quad & EI_y w'''' + Fw'' + M_y'' + \phi M_z'' + 2\phi' M_z' + \phi'' M_z - v''' M_x - 2v'' M_x' - v' M_x'' = 0 \\
 2a. \quad & EI_z v'''' + Fv'' + M_z'' + \phi M_y'' + 2\phi' M_y' + \phi'' M_y + w''' M_x + 2w'' M_x' + w' M_x'' = 0 \\
 3a. \quad & EI_w \phi'''' - (GI_t + K)\phi'' + v'' M_y + w'' M_z + M_x'' - w M_z'' - v M_y'' = 0
 \end{aligned}$$

Deze d.v.'s vormen de basis voor verdere analyse en uitwerking.

Zonder nadere uitleg worden zij ook door van der Put [22] als uitgangspunt geïntroduceerd.

Overigens: de laatste term van 1a. en 2a. ontbreekt (evenals bij van der Put [22]). Er wordt kennelijk van uit gegaan (2.179b) dat het wringend moment M_x lineair verloopt met de x -as. Als dat zo is heeft de 2^{de} afgeleide de waarde nul en kan dan inderdaad worden weggelaten. Er zijn echter veel situaties denkbaar, dat de aangroeiing van het wringend moment (in relatie

met de uitbuiging) kromlijng (bij voorbeeld sinusvormig) verloopt en dan behoort die laatste term er wel degelijk bij.

Afhankelijk van de belasting en de randvoorwaarden worden deze d.v.'s verder uitgewerkt. Het blijkt echter dat er maar zeer weinig omstandigheden zijn waarbij rechtstreeks oplosbare vergelijkingen ontstaan, met eenvoudig te integreren en/of te differentiëren functies. Meestal moet er met behulp van numerieke methoden een zo goed mogelijke praktische benadering gezocht worden. Bij toepassing van geschikte computerprogramma's behoeft dat geen belemmering meer te zijn.

Voor verdere uitwerking wordt door Ch. en A. een overzicht van randvoorwaarden gegeven dat is opgenomen in Hoofdstuk 4.3 van deze dissertatie.

In Ch. en A. hoofdstuk 3 volgt een uitgebreide behandeling van buiging in zwakke richting van gebogen en gedrukte staven (lateral buckling of beams and beam-columns) van de hand van N.S.Trahair. Het grootste deel van tekst en illustraties van dit hoofdstuk is (in herziene versie) ook te vinden in Trahairs boek 'Flexural-torsional buckling of structures' [23].

In de volgende hoofdstukken van Ch. en A. worden zeer veel situaties (wiskundig en numeriek) uitgewerkt op basis van de hiervoor genoemde d.v.'s., waarbij vooral de kritische belasting (zoals bij Timoshenko [6]) wordt berekend.

**[11] Vandepitte, D.,
Berekening van constructies; bouwkunde en civiele techniek
Gent, 1979, 1980, 1982**

Dit omvangrijke standaardwerk gaat zeer uitgebreid in op alle mogelijk voorkomende mechanicaproblemen. Alle onderwerpen worden behandeld met veel wiskundige achtergrondinformatie, met veel toepassingen van reeksontwikkeling.

Ondanks de uitgebreidheid is het in het algemeen zeer lastig te volgen, doordat zelfs bij de afleiding van de meest eenvoudige gevallen alle mogelijke (bij)verschijnselen worden meegenomen. Als bij een uitgewerkt voorbeeld bijvoorbeeld zo'n 8 van de 10 termen tenslotte niet van toepassing blijken te zijn en dan gelijk nul worden gesteld en dus uit de formules verdwijnen is de bedoeling ineens wel redelijk overzichtelijk.

Hoewel dit werk (volgens het woord vooraf) vooral geschreven is als studieboek voor studenten lijkt het veel meer geschikt als naslagwerk voor (zeer ver) gevorderden.

De hierna volgende onderwerpen hebben bij de studie voor deze dissertatie goede diensten bewezen.

Deel 1 Hoofdstuk 3 Zuivere wringing

Voor willekeurige doorsneden leidt Vdp. de nodige d.v.'s af en constateert dat ze dezelfde gedaante hebben als de bekende zeepvliesheuvel van Prandtl, waardoor de oplossing soms intuïtief met een redelijke nauwkeurigheid kan worden gevonden. Vooral wordt aandacht besteed aan open en gesloten dunwandige profielen.

Voor rechthoekige profielen wordt afgeleid:

$I_{tor} = \frac{b^3 h}{3} \left\{ 1 - 0,63 \frac{b}{h} \left(1 - \frac{b^4}{12h^4} \right) \right\}$ waarvan de laatste term voor smalle doorsneden (bij:

$b/h < 2/3$) kleiner dan 1% is, zodat veilig kan worden aangehouden: $I_{tor} = \frac{b^3 h}{3} \left(1 - 0,63 \frac{b}{h} \right)$

De grootste schuifspanning treedt op in het midden van de lange zijde.

Voor staalprofielen wordt aannemelijk gemaakt dat: $I_{tor} = \frac{k}{3} \sum t^3 d$ waarbij: $k = 1,1$ à $1,3$

afhankelijk van de mate van afronding bij de samenstellende rechthoeken van het profiel.

De grootste schuifspanning treedt op langs de randen van het dikste onderdeel van het profiel.

Overigens zijn deze gegevens ook ruim beschikbaar in de gangbare tabellenboeken [44].

Deel 1 Hoofdstuk 4 Wringing met belemmerde welving

Bruikbaar is hier de behandeling van de torsieweerstand van I-profielen bij verhinderde welving, maar dit hoofdstuk biedt ten opzichte van Timoshenko [6] verder geen nieuwe inzichten.

Deel 2 Hoofdstuk 25 Drukstaven

Interessant (maar lastig te volgen) is de toepassing van het beginsel van virtuele arbeid om het (indifferente) evenwicht te berekenen van gedrukte en gebogen staven.

Wanneer een stelsel op de grens van stabiel- en labiel evenwicht is zal bij een willekeurige zeer kleine vormverandering dit evenwicht gehandhaafd blijven als er geen arbeid wordt toegevoegd of vrijgemaakt. Met andere woorden:

De som van de uitwendig verrichte arbeid + de som van de inwendig verrichte arbeid = 0

Uitwendige arbeid = (uitwendige) belasting x verplaatsingen

en/of: (uitwendige) momenten x rotaties *).

Inwendige arbeid = (inwendige) normaalspanningen x oppervlak x verplaatsingen

en/of: (inwendige) schuifspanningen x oppervlak x rotaties *).

*) rotatie = kromming x lengte van het betreffende deel(tje) van de staaf.

In Vdp. Deel 1 is dit principe al behandeld, maar in Deel 2.5.4 wordt dit nader uitgewerkt voor het algemene geval van (dunwandige) staven met willekeurige doorsneden met willekeurige belastingen, die al dan niet excentrisch aangrijpen. Omdat vervolgens alle termen van in- en uitwendige arbeid (zo'n 60 stuks) in schijnbaar willekeurige volgorde worden ingevoerd (zie onder andere: verg.59) is het geheel bijzonder lastig te volgen. Uiteindelijk verschijnen er dan vier d.v.'s (74 - 77), waarvan de eerste alleen de verkorting van de belaste staaf beschrijft, onafhankelijk is van de overige drie en dus voor de knik-kip

analyse buiten beschouwing kan blijven. Het stelsel overblijvende gekoppelde d.v.'s is in principe vergelijkbaar met dat van Chen +Atsuta [10].

Door het introduceren van willekeurige kleine verplaatsingen, respectievelijk rotaties (waarbij onder alle omstandigheden de totale virtuele arbeid = nul moet blijven) wordt een zogenoemde 'variatievergelijking' (78) opgesteld. Hierin zijn zo'n 65 termen gerangschikt naar hun invloed op de diverse vervormingen. Praktische toepassingen hiervan volgen dan in Vdp. hoofdstuk 27.

In Vdp. subhoofdstuk 6 volgt een overzichtelijke uitleg van het Wagner-effect.

De aanwezigheid van een axiale kracht heeft invloed op de torsiestijfheid. Bij een trekkracht verzet de staaf zich enigszins tegen torsie en wordt de effectieve torsiestijfheid groter (en bij een drukkracht kleiner). Van de door Vdp. beschreven relaties wordt gebruik gemaakt in Bijlage 3 van deze dissertatie. Vooral bij staven met grote drukspanning (kolommen) kan het Wagnereffect invloed hebben op de torsieknik. Overigens zal zich dit voornamelijk voordoen bij gedrongen staven, omdat bij slanke staven de mogelijkheid tot uitknikken zodanig maatgevend kan zijn dat de drukspanning klein moet blijven. Vdp. geeft hier enkele voorbeelden van, ook in relatie met verhinderde welving.

Deel 2 Hoofdstuk 27 Kip van volwandige liggers

In Vdp. 27.3 wordt de kip van volwandige liggers behandeld. Uitgegaan wordt van de eerder met behulp van virtuele arbeid ontwikkelde d.v.'s (25 - 75, 76, 77).

Voor een ligger met enkelsymmetrische doorsnede en constant buigend moment worden deze d.v.'s (31, 32, 33) door weglating van alle overbodige termen ineens veel eenvoudiger dan die van Chen en Atsuta [10] en vergelijkbaar met de d.v.'s bij Timoshenko [6].

Berekend wordt het kritische kipmoment (38), dat voor een dubbelsymmetrische doorsnede exact overeenkomt met de oplossingen van Timoshenko [6] en Chen en Atsuta [10].

In Vdp. subhoofdstuk 3.2 wordt een ligger met gelijkmatig verdeelde belasting behandeld.

Geconstateerd wordt dat de d.v.'s alleen met reeksontwikkeling oplosbaar zijn. Daarom wordt het principe van virtuele arbeid toegepast om de kritische belasting te vinden. Ingevuld wordt daarom de van alle overbodige termen ontdane variatievergelijking (78) uit hoofdstuk 25.

Voor een ongesteunde ligger op twee steunpunten van dubbelsymmetrisch profiel en met een gelijkmatig verdeelde belasting wordt de arbeidsvergelijking (omgezet in de notatie van Hoofdstuk 3.2 van deze dissertatie):

$$\delta(A_u - A_i) = \int_0^L \left[\left\{ -EI_y w'' + \frac{q}{2} x(L-x) \varphi \right\} \delta w'' + \left\{ \frac{P}{2} x(L-x) w'' - (qe) \varphi \right\} \delta \varphi - GI_t \varphi' \delta \varphi' - EI_w \varphi'' \delta \varphi'' \right] dx \equiv 0$$

Vdp. gaat er van uit dat alle uitbuigingen en rotaties evenals de virtuele verplaatsingen en rotaties als sinusreeksen zijn op te vatten.

Ter vereenvoudiging worden alleen de eerste twee termen van deze reeksen ingevoerd:

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{L} \quad \text{en} \quad \varphi = a_2 \sin \frac{\pi x}{L} + a_4 \sin \frac{3\pi x}{L}$$

Na een (volgens Vdp) "vrij lange maar gemakkelijke berekening" die overigens niet wordt uitgewerkt volgt als oplossing een vergelijking in de vorm van een matrix met een determinant van 4×4 termen.

Wanneer alleen de eerste termen van de reeksen wordt gebruikt, ontstaat een matrix met een determinant van 2×2 termen die een waarde nul moet hebben:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\pi^4 EI_y}{2L^3} & \frac{qL}{8} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) \\ \frac{qL}{8} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) & - \left[\frac{qeL}{2} + \frac{\pi^2 GI_{tor}}{2L} + \frac{\pi^4 EI_w}{2L^3} \right] \end{vmatrix} = 0$$

Vdp. geeft hiervoor als oplossing:

$$\frac{q_{cr} L^3}{28,91} = \sqrt{GI_{tor} EI_y + \frac{\pi^2}{L^2} EI_y EI_w + \left(1,465e \frac{EI_y}{L} \right)^2} + 1,465e \frac{EI_y}{L}$$

Met het vaststellen van deze kritische belasting lijkt zijn doel te zijn bereikt.

Ter vergelijking met de resultaten in deze dissertatie is dit toch wel verder uit te werken: De gevonden kritische belasting is te herkennen als de oplossing van een vierkantsvergelijking, die kan worden 'teruggerekend' als volgt:

$$\begin{aligned} \frac{q_{cr} L^2}{8} \frac{0,87L}{\pi} - 1,465e \frac{EI_y}{L} &= \sqrt{GI_{tor} EI_y + \frac{\pi^2}{L^2} EI_y EI_w + \left(1,465e \frac{EI_z}{L} \right)^2} \\ \left(\frac{q_{cr} L^2}{8} \right)^2 \left(\frac{0,87L}{\pi} \right)^2 - 2 \frac{q_{cr} L^2}{8} \frac{L}{1,15\pi} 1,465e \frac{EI_y}{L} &= EI_y GI_{tor} \left(1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_{tor}} \right) \\ (0,87M_{cr})^2 - 0,81M_{cr} e \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} &= \frac{\pi^2}{L^2} EI_y GI_{tor} \left(1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_{tor}} \right) = M_{kip}^2 \\ (0,87M_{cr})^2 - 0,81M_{cr} e F_{Ez} &= M_{kip}^2 \end{aligned}$$

wat tenslotte is te schrijven als:
$$\frac{(0,87M_{cr})^2}{M_{kip}^2 + 0,81M_{cr}eF_{Ez}} = 1$$

Dit resultaat is overigens ook te bereiken door de voorgaande determinant nul te stellen:

$$-\left\{ \frac{qL}{8} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) \right\}^2 + \frac{\pi^4 EI_y}{2L^3} \left[\frac{qeL}{2} + \frac{\pi^2 GI_{tor}}{2L} + \frac{\pi^4 EI_w}{2L^3} \right] = 0$$

$$\left\{ \frac{qL^2}{8} \frac{2 \times 4,290}{\pi^2} \right\}^2 = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \left[\frac{8}{\pi^2} \frac{qeL^2}{8} + \left(GI_{tor} + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2} \right) \right]$$

Hieruit volgt dezelfde oplossing:

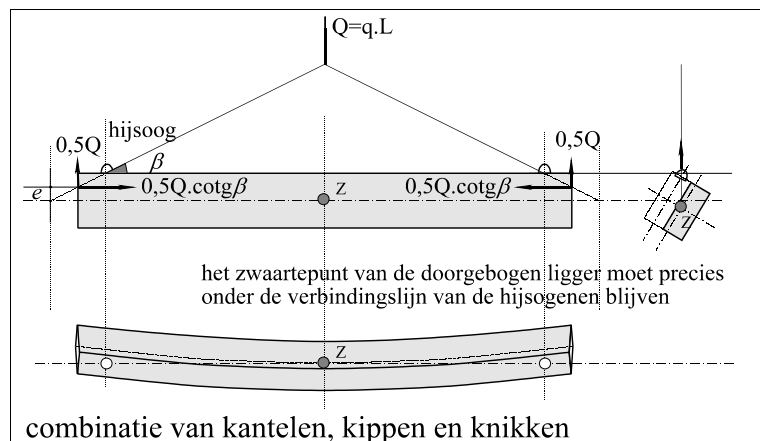
$$\frac{(0,87M_y)^2}{F_{Ez} (GI_t + 0,81M_y e)} = \frac{(0,87M_y)^2}{M_{kip}^2 + 0,81M_y e F_{Ez}} = 1$$

In de formule voor M_{cr} zou de waarde 28,91 volgens Vdp. nauwkeuriger kunnen worden berekend op: 28,325 als de 2^{de} term van de genoemde sinusreeksen ook zou worden gebruikt. De term 0,87 (in deze dissertatie gedefinieerd als: k_1) wordt dan 0,89.

Dit stemt geheel overeen met de uitkomsten (voor hetzelfde belastinggeval, zonder axiale drukkracht) volgens de Hoofdstukken 5.1.2 en 6.1.2 en in de bijbehorende Bijlagen van deze dissertatie beredeneerde waarde voor k_1 .

Het begrip 2^{de}-orde wordt door Vdp. wel hier en daar genoemd, maar nauwelijks uitgewerkt. In ieder geval niet zo dat de relaties tussen initiële vervormingen, 1^{ste}-orde vervormingen en vervormingen (met spanningen) in de eindtoestand hieruit zouden kunnen worden afgeleid. Evenmin kan de uiteindelijke rotatie hieraan worden ontleend.

Een interessante afsluiting van dit hoofdstuk is het onderwerp 'kantelkip', waarin wordt nagegaan of een slanke balk met of zonder een spreibalk kan worden opgehesen. Zie figuur B1.6.



figuur B1.6

Kantelkip is gevaarlijker dan 'gewone' kip omdat er (in deze transportsituatie nog) geen gaffelopleggingen zijn en de uiteinden van de balk dus (beperkt) kunnen roteren.

Bovendien zijn er bij een schuine ophangkabel altijd een drukkracht: ($F_c = 0,5Q \cotg \beta$) en een extra moment: ($M = F_c e$) aanwezig.

**[12] Bouma, A.L.,
Mechanica van constructies, elasto-statica van slanke structuren
Delft, 1989**

Hieruit zijn voor de in deze dissertatie behandelde onderwerpen van belang de hoofdstukken: 3 Op wringing belaste staven, en 22 Wringing bij kokers met vervormbare doorsneden. Uitvoerig wordt aangetoond dat het verhinderen van welving tot een stijver profiel leidt.

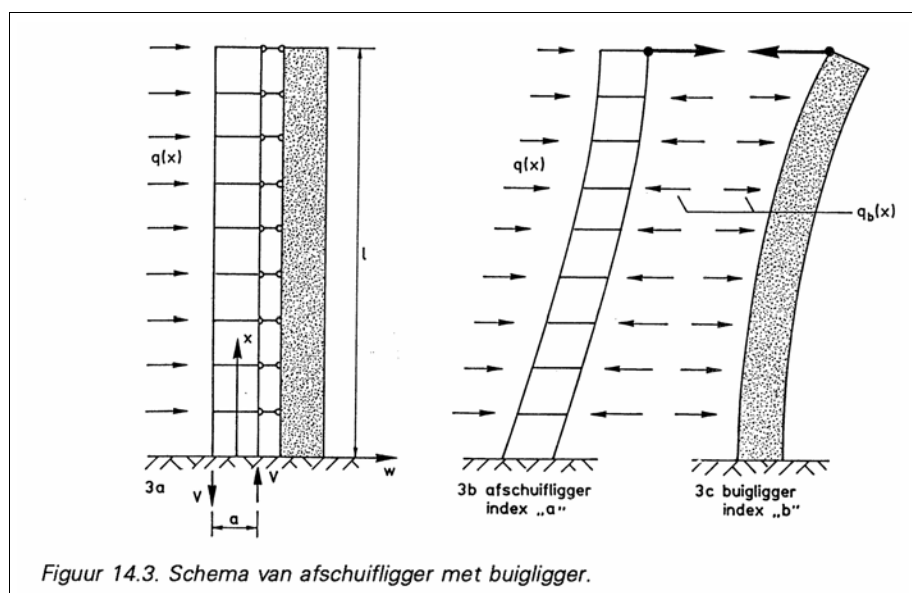
Analogieën

Het komt in de mechanica vaker voor dat voor diverse (ongelijke) problemen toch identieke oplossingen bruikbaar zijn.

Een bekend voorbeeld daarvan is de berekening van de torsiestijfheid van een staafdoorsnede met behulp van de 'zeepvliesanalogie'.

Ook constructietypen als parallelsystemen kunnen soms op identieke wijze worden behandeld.

Een toepassing daarvan is de bekende combinatie van buigligger en afschuifligger, die (90° gedraaid) ook zeer veel voorkomt als een buigstijve kern (ingeklemd in de fundering) met raamwerk (te beschouwen als afschuifstelsel van vloeren en kolommen), waarvan een uitgebreide behandeling is te vinden op B. bladzijde 183 en volgende. Zie B. figuur 14.3, hier overgenomen als figuur B1.7:



figuur B1.7

Interessant is dat de oplossing van dit belastinggeval gebaseerd is op een identieke d.v. als een uitkraging belast met een gelijkmatig verdeeld torsiemoment waarbij de werving van de doorsneden bij de inklemming wordt verhinderd.

De toegepaste d.v.'s zijn:

afschuiving - kernbuiging	torsie - verhinderde werving
$V' = -q = GAw'' - EI_y w''''$	$M_t' = -m_t = GI_{tor} \varphi'' - EI_w \varphi''''$
$V = GAw' - EI_y w'''$	$M_t = GI_{tor} \varphi' - EI_w \varphi'''$

Op dezelfde positie in de d.v.'s staan:

(wind)belasting per m' hoogte q	torsiemoment per eenheid van lengte m_t
dwarskracht V	torsiemoment M_t
afschuifstijfheid GA	'zuivere' torsiestijfheid GI_{tor}
buigstijfheid EI_y	torsiestijfheid door belemmerde werving EI_w

B. geeft hiervoor als algemene oplossing: $w = C_{B1}e^{ax} + C_{B2}e^{-ax} + \frac{qL}{GA}x - \frac{qx^2}{2GA}$

Met: $e^{ax} = \cosh(ax) + \sinh(ax)$ en $e^{-ax} = \cosh(ax) - \sinh(ax)$ is dit ook te schrijven als:

$$w = C_{B3} + C_{B4}x - \frac{q}{2GA}x^2 + C_{B5} \sinh(ax) + C_{B6} \cosh(ax)$$

waarin: $a = \sqrt{\frac{GA}{EI}}$, $C_{B3} = -C_{B6}$ en C_{B5} afhankelijk van de randvoorwaarden

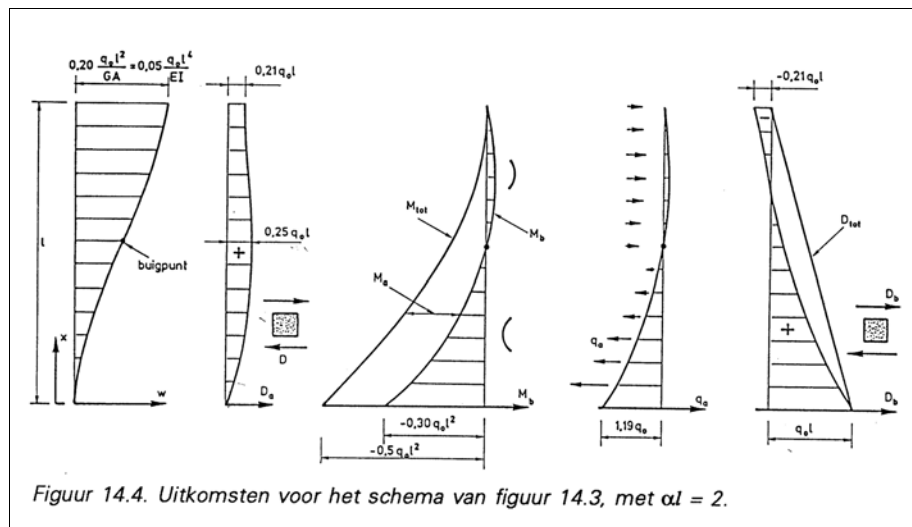
Deze buig-afschuif-vergelijking komt overeen met de rotatie-torsie-vergelijking (zie voor afleiding Bijlage B3.2 van deze dissertatie):

$$\varphi = C_1 + \frac{m_t L}{GI_{tor}}x - \frac{m_t}{2GI_{tor}}x^2 + C_7 \sinh(bx) + C_8 \cosh(bx)$$

waarin: $b = \sqrt{\frac{GI_{tor}}{EI_w}}$. $C_1 = -C_8$ en C_7 zijn afhankelijk van de randvoorwaarden.

Omdat in beide gevallen dezelfde d.v. opgelost moet worden en de uitkomst afhankelijk is van de randvoorwaarden is het dus mogelijk om reeds bekende oplossingen van buig-afschuifproblemen te benutten om torsie-welvingsproblemen te analyseren of omgekeerd. Als de afschuifligger en de buigligger onafhankelijk van elkaar de belasting zouden moeten opnemen ontstaan er uitwijkingen die alleen overeenkomen in richting, maar hun vorm en grootte moeten gelijk gemaakt worden door inwendige koppelkrachten.

De oplossing die B. geeft voor een combinatie van een kern (als buigligger) en een raamwerk (als afschuifligger), bij een verhouding tussen staaflengte, afschuifstijfheid en buigstijfheid: $\alpha L = 2$, wordt getoond in B. figuur 14.4, hier overgenomen als: figuur B1.8:



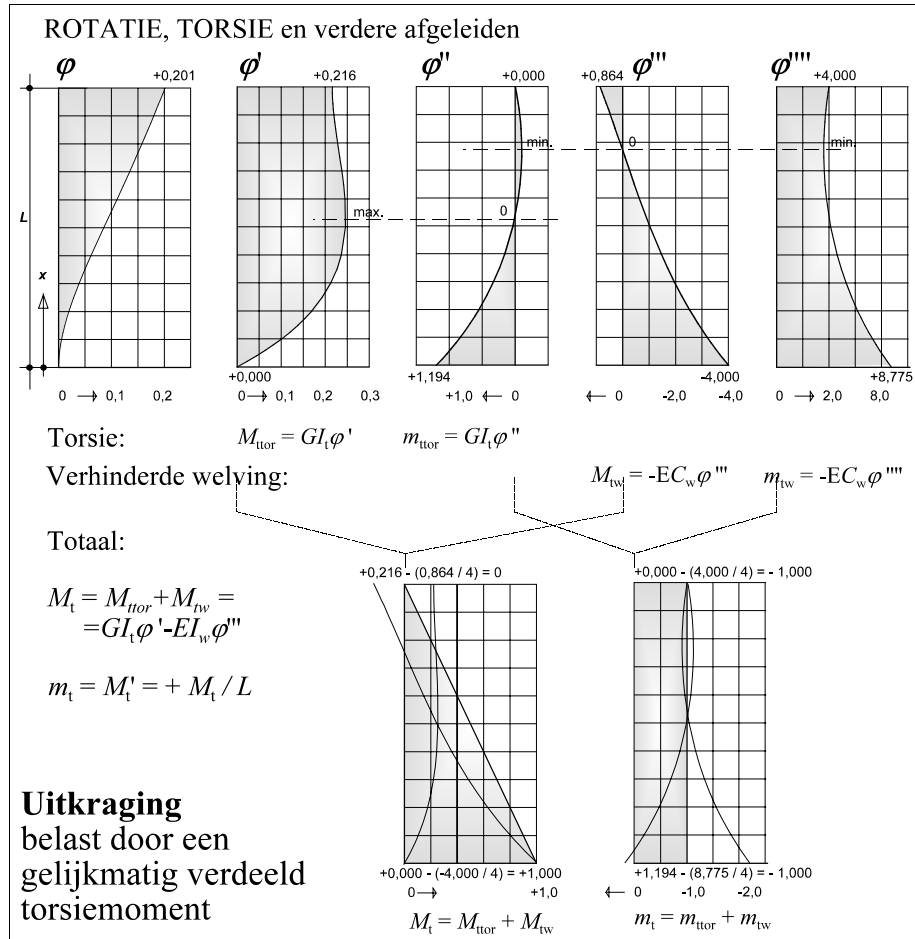
figuur B1.8

In de vijf grafieken zijn van links naar rechts afgebeeld:

1. de uitwijking van de gehele constructie
2. de dwarskracht op het raamwerk: evenredig met de 1^{ste} afgeleide w' .
3. de momentenlijn: gearceerd: de bijdrage van de kern
wit: M_a : de bijdrage van het raamwerk (evenredig met $\bar{w} - w$)
totaal: $M = 0,5q(L-x)^2$
4. de onderlinge koppelbelasting tussen kern - en raamwerk
5. de dwarskrachten: gearceerd: de bijdrage van de kern
wit: de bijdrage van het raamwerk (evenredig met: w')
totaal: $V = q(L-x)$

N.B. Bij het vrije staafeind (aan de top) treedt een 'randstoring' op. Daar resulteert weliswaar: $V = 0$, maar deze dwarskracht is het resultaat van het evenwicht tussen: V_a door de afschuifligger en V_b door de buigligger. Deze inwendige koppelkracht is aangegeven met een dikke pijl in figuur B1.7 (rechts boven) en bedraagt in dit geval ruim 20% (0,216) van de maximale dwarskracht die voor 100% door de buigligger bij de inklemming wordt afgedragen aan de fundering.

Als een uitkraging met overeenkomstige randvoorwaarden wordt belast door een gelijkmatig verdeeld torsiemoment is het verloop van de resultaten geheel vergelijkbaar, zoals wordt getoond in figuur B1.9:



figuur B1.9

De genoemde koppelkracht bij het staafeinde wordt dan een inwendig torsiemoment. Het opnemen daarvan is bij een massieve staaf geen probleem, maar bij een stalen I-profiel zou een kopschot nuttig zijn om dit momenten over te brengen van de flenzen naar de gehele doorsnede.

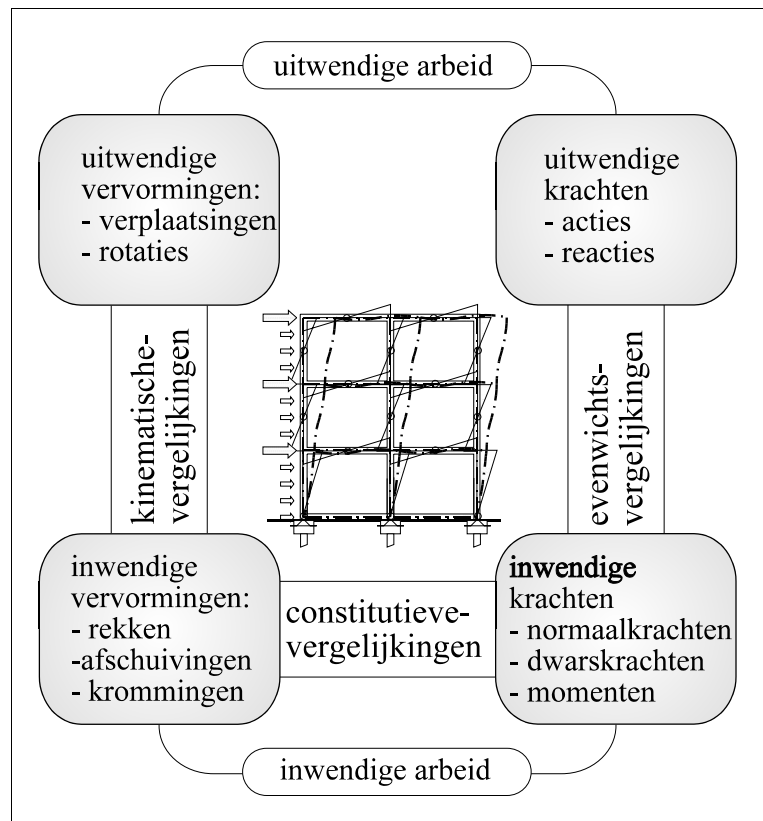
**[13] Blaauwendraad J.,
Elasticiteitstheorie, collegedictaat
Delft, 2001**

Hierin wordt een heldere en consequente structurering van de oplossingsmethoden van mechanicaproblemen geboden.

In een duidelijk relatieschema (zie figuur B1.10) worden de betrekkingen getoond tussen:

- Evenwicht van uitwendige en inwendige krachten,
- Elastische eigenschappen van het materiaal en vervormingen van de voorkomende elementen,
- Samenhang tussen de elementen onderling.

Zie figuur B1.10:



figuur B1.10

Ook wordt duidelijk gemaakt hoe de principes van in- en uitwendige arbeid zijn toe te passen bij de oplossing van de nodige vergelijkingen.

Met behulp van dit algemene relatieschema kan in principe elke draagconstructie duidelijk worden gemodelleerd.

In 2.8 behandelt Bl. een interessant voorbeeld van een door veren (lateien) gekoppeld wandsysteem onder windbelasting waarin (nagenoeg) dezelfde d.v. moet worden opgelost als bij de door Bouma [12] behandelde combinatie van kern en raamwerk.

De resultaten hiervan zijn geheel vergelijkbaar.

**[14a] Dicke, D.,
Stabiliteit voor ontwerpers
Delft, 1991**

Behandeling van een methode om in het ontwerpstadium van een constructie de stabiliteit te benaderen met globale gegevens en zeer eenvoudige formules. Een steeds terugkerende factor hierin is de (inmiddels zeer bekende) vergrotingsfactor van de 2^{de}-orde:

$$\frac{n}{n-1}$$

Deze factor blijkt te kunnen functioneren als doeltreffend en eenvoudig hulpmiddel om de stabiliteit van op druk belaste constructies te beoordelen. Dit wordt toegelicht met voorbeelden van diverse typen constructies.

In deze dissertatie wordt het principe van de 2^{de}-orde vergrotingsfactor verder ontwikkeld en uitgebreid voor toepassing van kipstabiliteit al dan niet in combinatie met knikstabiliteit.

**[15] Blass, H.J. et al., STEP
(Structural Timber Education Programme) Timber engineering
Almere, Centrum Hout, 1995**

STEP is een Europees project (14 landen van de EU) ten behoeve van het geven van achtergrondinformatie over en toelichting op de normen voor het berekenen van houtconstructies EC 5 (Eurocode 5) in twee delen. Het Centrum Hout heeft (in het kader van de Technische Houtdocumentatie) van een belangrijk deel van STEP een Nederlandse bewerking verzorgd (mede) gericht op de TGB 1990.

STEP 1. bevat: A. Basis of design and material properties
 B. Structural components
 C. Joints

STEP 2. bevat: D. Design - Details
 E. Design - Structural systems

In hoofdstuk "B Structural components" komen balken en kolommen aan de orde, waarbij zonder wiskundige afleiding de formules uit EC 5 worden gegeven, voorzien van enig commentaar en enkele rekenvoorbeelden.

De rekenmethode van EC5 is zeer veel eenvoudiger dan die van de Nederlandse NEN 6760. In Hoofdstuk 9 en Bijlagen B2 van deze dissertatie wordt nader ingegaan op uitkomsten volgens EC 5 in vergelijking met de Nederlandse NEN 6760 en de resultaten van de in deze dissertatie ontwikkelde methode.

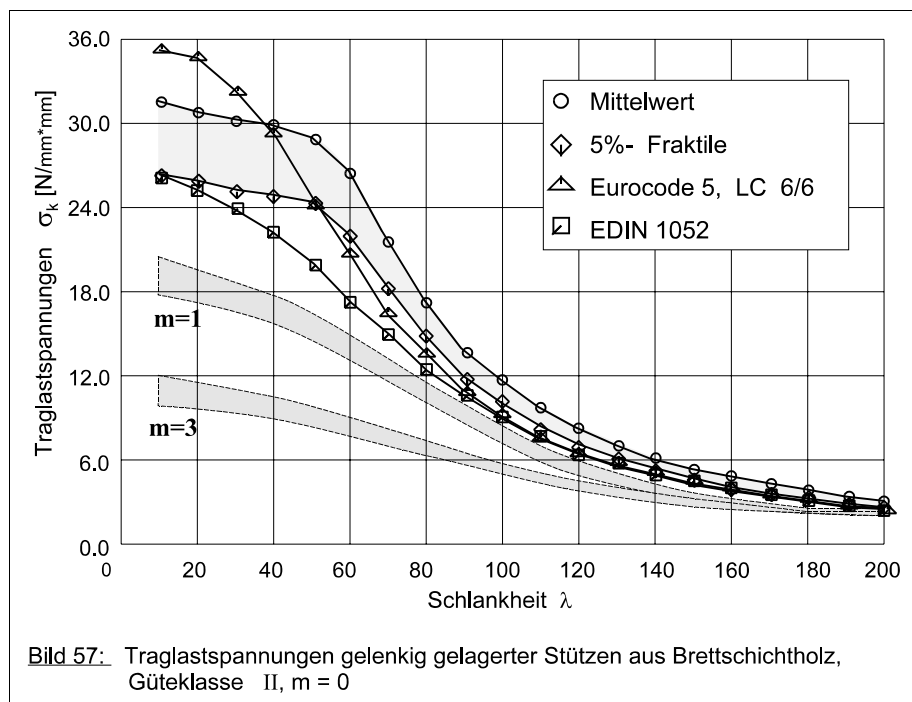
[16] **Blass, H.J.,**
Tragfähigkeit von Druckstäben aus Brettschichtholz unter
Berücksichtigung streuender Einflussgrößen
 dissertatie, Karlsruhe, 1987

Deze dissertatie behandelt de berekening van het draagvermogen van op druk en buiging belaste staven van gelamineerd hout. Rekening houdend met alle belangrijk geachte invloedsgrontheden, zoals E-modulus, imperfecties als initiële kromming en kwasten, volumieke massa, vochtgehalte, vingerlassen enz., zijn spanning-vervormingsdiagrammen bepaald. Deze zijn de basis van een daartoe opgezet Fortran rekenmodel waarmee uit een groot aantal uitgevoerde simulaties het draagvermogen van op druk en buiging belaste staven wordt afgeleid. Met behulp van de gemiddelde waarden en de variatiecoëfficiënten zijn de karakteristieke waarden vastgesteld in relatie tot de verhouding tussen moment en axiale drukkracht, uitgedrukt in de excentriciteit van de belasting. Hiermede worden knikcurven bepaald en vergeleken met de, toenmalige, Eurocode 5 (1986) en met DIN 1052 (1969). Voor een voorbeeld hiervan zie de grafiek in figuur B1.11(bild 57 uit B1.) voor kolommen van gelamineerd hout in "Güteklasse II" met een centrisch aangrijpende axiale drukkracht met:

$$m = \frac{e}{r} = \frac{e}{\frac{1}{6}h} = 0$$

Bij combinaties met momenten verlopen de 'lijnenbundels' zoals extra is aangegeven. Deze zijn ontleend aan bild 60 en bild 63 is voor excentriciteiten:

$m = 1$ ($e=1/6h$ met F_c op de rand van de kern van de doorsnede)
 respectievelijk:
 $m = 3$ ($e=1/2h$ met F_c op de rand van de doorsnede)



figuur B1.11

N.B. De lijn volgens EC 5 in de grafiek is niet meer actueel omdat EC 5 inmiddels is aangepast.

Bij excentrisch aangebrachte drukkrachten met: $m = 1$ (op de rand van de kern van de doorsnede) respectievelijk $m = 3$ (op de rand van de doorsnede) verlopen de 'lijnenbundels' zoals extra is aangegeven.

Bij slanke staven blijken de variatiecoëfficiënten klein en is vooral de E-modulus maatgevend voor het draagvermogen. Bij gedrongen staven zijn de variatiecoëfficiënten groter en zijn vooral de imperfecties van de staafkromming en de afmetingen en het vochtgehalte (en daarmee de druksterkte) maatgevend voor het draagvermogen.

Voor de bepaling van de knikfactor worden door Bl. drie variabelen ingevoerd afhankelijk van de sterkteklasse van het hout:

- f_c = druksterkte
- E = elasticiteits-modulus
- e = excentriciteit van de belasting, waarin tevens de initiële uitbuiging wordt verwerkt.

Na een adequate keuze van deze grootheden, in overeenstemming met de materiaal- en geometrie-eigenschappen van de betreffende staaf, wordt in een iteratieproces de kniksterkte van gedrukte staven gevonden. De uitkomsten hiervan zijn terug te vinden in de knikformules van de sindsdien herziene EC 5.

In Bijlage 2 van deze dissertatie wordt getoond hoe de uitkomsten van de methode met n_z^* hiermee overeenstemmen.

**[17] Brüninghoff, H.,
Spannungen und Stabilität bei quergestützten Brettschichtträgern,
dissertatie, Karlsruhe, 1972**

Dit gezaghebbende werk gaat vooral over de kipstabiliteit van constructies (balken en vooral spanten) die in dwarsrichting zijn gesteund. Na een wiskundige afleiding volgen in principe dezelfde differentiaalvergelijkingen als bij Timoshenko [6], Chen en Atsuta [10] en Vandepitte [11]. Vervolgens wordt dit grondig uitgewerkt, wat leidt tot zeer ingewikkelde formules. Oplossingen van de kritische belasting zien er weer wat eenvoudiger uit. Voor een balk op twee steunpunten met gelijkmatig verdeelde belasting wordt door Br. in (6.12) op blz. 43 dan gevonden:

$$\left(\frac{8}{3\pi}\bar{M}_{y1}\right)^2 - \frac{8}{3\pi}\bar{M}_{y1}e\left(\frac{\pi^2}{L^2}EI_z - F_c\right) - GI_t\left(\frac{\pi^2}{L^2}EI_z - F_c\right) = 0 .$$

Duidelijk is hier dezelfde vierkantsvergelijking te herkennen als bij Vandepitte [11].

Na enige bewerkingen en herschikking ontstaat:

$$\left(0,85\bar{M}_{y1}\right)^2 = (GI_t + 0,85\bar{M}_{y1}e)(F_{Ez} - F_c) \quad \text{waaruit volgt:} \quad \frac{(0,85\bar{M}_{y1})^2}{F_{Ez}(GI_t + 0,85\bar{M}_{y1}e)} = \left(1 - \frac{F_c}{F_{Ez}}\right)$$

wat tenslotte is te schrijven als:

$$\frac{(0,85\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,85\bar{M}_{y1}eF_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} = 1$$

Afgezien van kleine verschillen in grootte van de reductiegetallen k_1 en k_2 stemt dit overeen met de in deze dissertatie gevonden waarde voor de kritische belasting als: $n_z^* = 1$. Zie in Hoofdstuk 5 formule (5.37) voor belasting door een axiale drukkracht met buiging door een gelijkmatig verdeelde belasting.

Vervolgens gaat Br. zeer diep in op het effect van flexibele steunverbanden, met (als niet onverwachte) conclusie dat, bij liggers die aan de drukzijde gesteund worden, de dwarse reactiekrachten (= de belasting op de steunconstructie) kleiner, dus gunstiger, zijn bij een:

- Grote balkbreedte:

De balkbreedte blijkt vrij veel invloed te hebben, want hoe meer zijdelingse stijfheid en torsiestijfheid (beiden: evenredig met de balkbreedte tot de 3^{de} macht) hoe stabielere de balk is en hoe minder (uitwendige) steun er dus nodig is.

- Grote balkhoogte:

Bij een grotere inwendige moment-arm ontstaat een kleinere drukcomponent uit het buigend moment en dus een kleinere belasting op de steunconstructie. Bovendien is door de grotere 'hefboomsarm' ten opzichte van het midden een kleinere correctiekracht nodig om de bij kip optredende rotatie te verminderen.

- Grote stijfheid van de steunconstructie:

Hierdoor ontstaan kleinere zijdelingse vervormingen en dus kleinere zijdelingse reactiekrachten om evenwicht te maken. Dit is vergelijkbaar met, bij voorbeeld, een boogvormige overspanning, waar de horizontale reactie omgekeerd evenredig is met de hoogte van de boog (bij een parabool geldt: $R_h = QL / 4h$).

Voor een steunconstructie betekent dit: belasting Q (lees: dwarsbelasting) = evenredig met h (lees: zijdelingse vervorming) $\times R_h$ (lees: drukcomponent uit het moment van de overspanningsconstructie = te benaderen als: $N = M / 0,67h$).

Overigens is de belasting op een voldoende stijve steunconstructie veelal minder dan 10% van de belasting op de overspanningsconstructie zelf. (Zie ook Bijlage 7.2.3 van deze dissertatie). Wanneer dus de stijfheid van de steunconstructie bekend (of berekend) is kan het aantal daarmee te steunen spanten (of balken) worden bepaald. Br. geeft daarvan enige uitgewerkte rekenvoorbeelden en ondersteunt de theoretische afleidingen van de benodigde formules met de resultaten van uitgevoerde proeven op grote balken en spanten.

**[19] Bartels, D. en Bos, C.A.M.,
Kipstabiliteit van stalen liggers**
Amsterdam/Brussel, 1973

Uitgaande van de door Timoshenko [6] afgeleide d.v.'s worden voor verschillende belastingen praktische oplossingen gegeven. Veel aandacht wordt besteed aan het voor staalprofielen karakteristieke verschijnsel van verhinderde welving en de daaruit volgende consequenties op vormvaste en niet-vormvaste doorsneden. De resultaten van de (met vormveranderingsarbeid) uitgevoerde berekeningen worden vergeleken met experimenteel onderzoek naar het kipedrag van een aantal doorgaande, hoge, smalle modelliggers op kleinere schaal. De resultaten van deze studie hebben geleid tot de in de Norm 3851 (TGB1970 - Staal) opgenomen rekenregels betreffende de kipstabiliteit van stalen liggers.

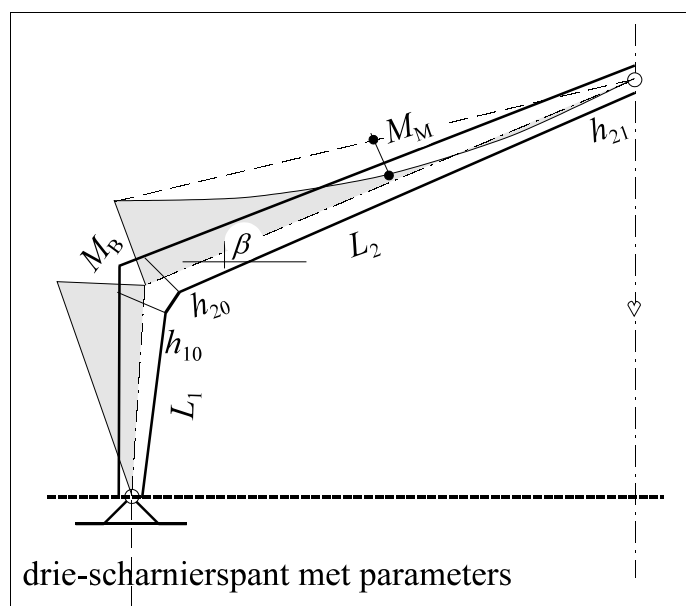
**[21] Padmoes, D.A.,
Flexural-torsional buckling of timber portal frames,**
dissertatie, Eindhoven, 1990

Gelamineerd houten (driescharnier)spanten zijn meestal ontworpen met zeer slanke (smalle en hoge) doorsneden en zijn daardoor gevoelig voor kipinstabiliteit. In zijn dissertatie ontwikkelt P. een computermodel, waarin via een iteratieproces de kipbelasting wordt berekend van drie-scharnierspanten met verschillende geometrische eigenschappen. De uitkomsten stemmen meestal voldoende overeen met in de literatuur gevonden waarden en met metingen aan een testmodel. Als praktisch resultaat van dit onderzoek worden rekenregels gegeven voor het ontwerpen van de afmetingen van houten drie-scharnierspanten.

Als parameters zijn ingevoerd enkele varianten in verhoudingen van:

1. dakhelling: $\beta = 10^0, 20^0$ en 30^0
2. verhouding dakligger / kolom:
 $L_2 / L_1 = 1$ tot 6
3. verhouding lengte / profielhoogte:
 $L_2 / h_{20} = 7$ tot 13
4. verloop profielhoogte:
 $h_{21} / h_{20} = 0,2$ tot $1,0$
5. verhouding momenten:
 $M_M / M_B = 0$ tot $0,5$

Zie figuur B1.13.



figuur B1.12

De resultaten worden gepresenteerd in tabellen en grafieken. Omdat de invloed van de dakhelling op de kipbelasting vrij gering is kan voor het ontwerpen worden volstaan met het invoeren van een gemiddelde helling van 20° .

N.B. Uit een studie over drie-scharnierspanten van de werkgroep C. van de Vereniging van Houtconstructeurs, gepubliceerd in de brochure 'Driescharnierspanten' [34], blijkt eveneens dat bij dakhellingen kleiner dan 25° de benodigde spantafmetingen bij toenemende dakhelling kleiner kunnen worden. Maar bij dakhellingen groter dan 25° moeten (door de, volgens NEN 6702, hogere in rekening te brengen windbelastingen) de benodigde spantafmetingen plotseling sterk stijgen.

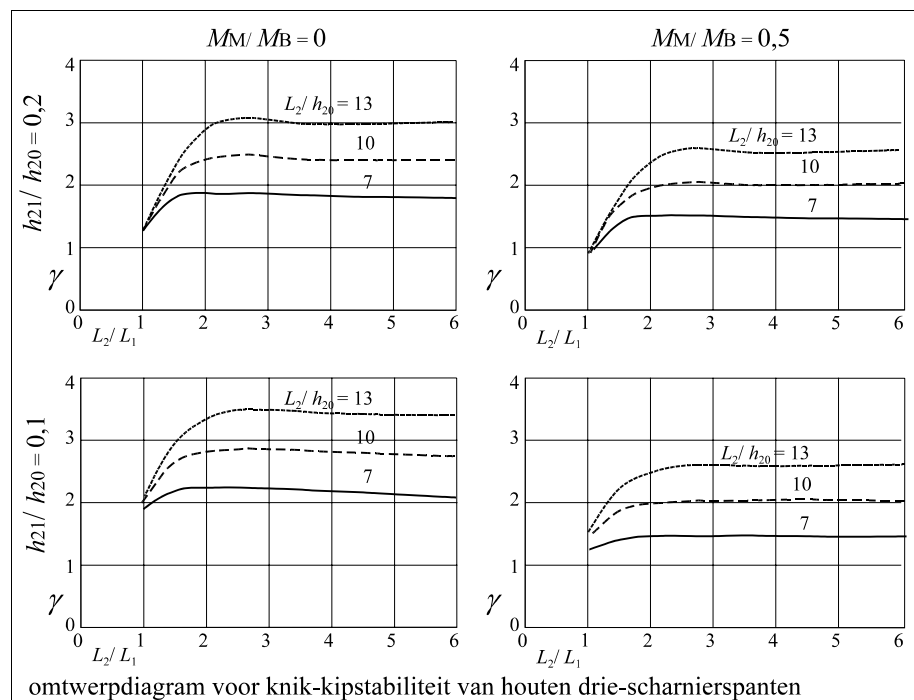
Een en ander resulteert bij P. in een zeer eenvoudige ontwerpformule:

$$M_B = \frac{\gamma}{L_2} EI_z$$

Deze formule kan zo eenvoudig zijn omdat de torsiestijfheid voor rechthoekige houten doorsnede te benaderen is met: $GI_t = 0,2EI_z$.

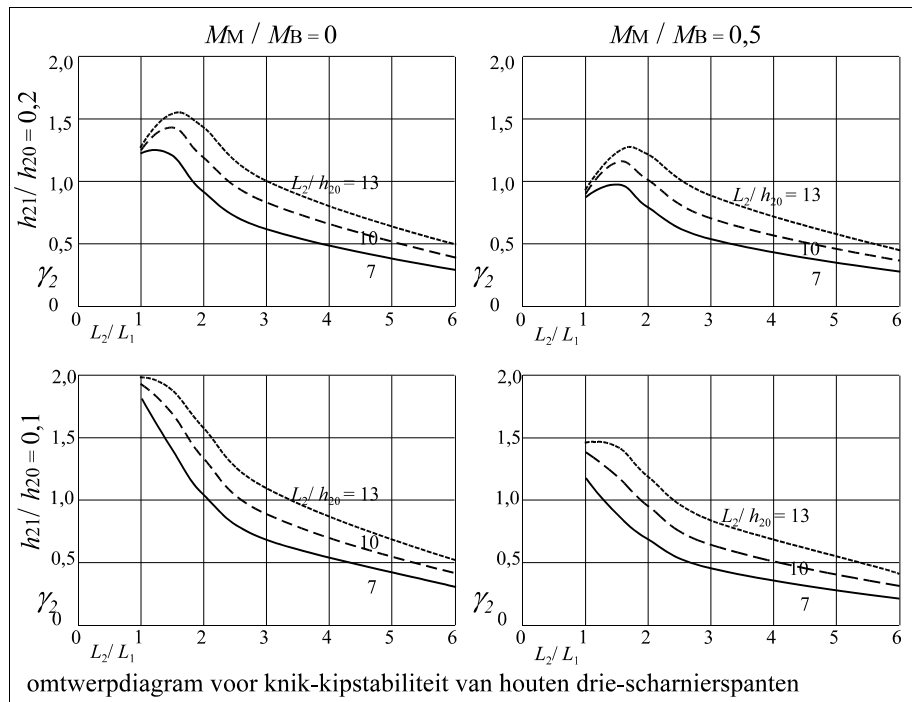
Voor de in te vullen factor γ geeft P. echter een gecompliceerde formule met een lijst van tweemaal zestien factoren, afhankelijk van de hiervoor genoemde vijf verhoudingen, waardoor de berekening alleen met een spreadsheetprogramma efficiënt is uit te voeren.

Voor een enkel geval, met dakhelling $\beta = 20^\circ$, wordt ook een ontwerpgrafiek gegeven waarvan een (bewerkt) voorbeeld is opgenomen als figuur B1.13.



figuur B1.13

Omdat bij dit type constructies de dakliggers doorgaans zijdelings zijn gesteund door gordingen en de kolom vaak zijdelings ongesteund voorkomt zou het duidelijker zijn om de grafiek om te werken naar de relatie met de kolom L_1 . Ter vergelijking is dat (door schrijver dezes) gedaan in figuur B1.14.



figuur B1.14

Nu is vooral duidelijk te zien dat bij toenemende L_2 de draagcapaciteit van het spant afneemt. Dit is verklaarbaar omdat de gaffeloplegging bij de knie van het spant (door de grotere lengte van de dakligger) als een slappere veer gaat werken en het spantbeen dus gemakkelijker kan kippen.

Ter vergelijking met andere kipformules is de formule van P. ook te schrijven als:

$$M_B = \frac{\gamma}{L_2} EI_z = \frac{\gamma}{L_2} \sqrt{\frac{EI_z GI_t}{0,2}} = 0,71 \gamma \frac{\pi}{L_2} \sqrt{EI_z GI_t}$$

De omwerking met betrekking tot de kolomlengte L_1 is gedaan met:

$$M_B = \frac{\gamma}{L_2} EI_z = \frac{\gamma}{L_1} \frac{L_1}{L_2} EI_z = \frac{\gamma_2}{L_1} EI_z \quad \text{Dus: } \gamma_2 = \frac{L_1}{L_2} \gamma$$

[22] Put, T.C.A.M. van der,
Stabiliteit van liggers (achtergrond TGB), in PAO cursus
 Delft 1992

Deze bijdrage vormt de basis van de stabiliteitsregels in de huidige TGB-hout. Uitgegaan wordt (zonder verdere introductie of toelichting) van de d.v.'s van Chen en Atsuta [10]. Daarna wordt een algemene toetsformule gepresenteerd, waarin diverse (al dan niet excentrisch aangrijpende) belastingen kunnen worden ingevuld, zoals formule (15') op blz. 9. Behalve een iets andere verwerking van de excentriciteit stemt het resultaat hiervan overeen met de in deze dissertatie (Hoofdstukken 5 en 6) afgeleide basisformules. Via meer wegen is zo een vergelijkbare oplossing mogelijk.

Een (voor bouwtoezichten bruikbare) controleformule is het resultaat. In het kader van de doelstellingen van een norm zou het hierbij kunnen blijven, maar vdP. vervolgt met een poging tot verdere vereenvoudigingen en komt dan uiteindelijk tot een methode waarbij eerst een berekening wordt gemaakt van een instabiliteitsfactor die in NEN 6760 art. 11.14. t/m 11.17 is terug te vinden als k_{ins} . In de uitwerking tot een bruikbare toetsformule wordt een aantal (verwaarloosbaar geachte) termen weggelaten, waarna de overblijvende kromlijnige interactieformule via een interpolatie wordt benaderd tot een stelsel van twee rechte lijnen. Door de (soms te) grote sprongen is de afleiding hiervan niet goed te volgen.

Na invullen van een aantal resultaten in de hiervoor genoemde vergelijking (15') blijkt dat de uitkomsten onveilig zijn als: $k_{ins} > 0,5$ wat blijkt te gelden voor alle doorsneden met een breedte/hogte verhouding: $b/h > 0,2$.

De TGB-commissie heeft naar aanleiding van deze bevindingen in de herdruk van NEN6760 - dec. 2001 in art. 11.15.3 een correctie opgenomen.

[23] Trahair, N.S.,
Flexural-torsional buckling of structures.
 London, 1993

Dit is een uitgebreid en praktisch werk over kippen van liggers op twee en meer steunpunten en uitkragingen, kolommen, portalen en bogen, met diverse vormen van ondersteuning (ook zijdelings) en diverse doorsneden.

Interessant is dat niet wordt uitgegaan van de d.v.'s van Chen en Atsuta [10] maar van het principe van virtuele arbeid. Hierdoor is het niet nodig om de exacte formules voor de vervormingsvergelijkingen te vinden (hetgeen wiskundig meestal onmogelijk is).

De oplossing van Tr. is om de vervormingen samen te stellen uit een beperkt aantal sinusreeksen, waarvan de bewerkte termen in een determinant worden verzameld. De laagste wortel hiervan komt dan overeen met de kritische belasting.

Bij toepassing van een sinusreeks met één term zoals: $v = \bar{v} \sin \frac{\pi x}{L}$ is de oplossing al vrij nauwkeurig (gevonden zijn afwijkingen van max. 5 %), maar bij toevoeging van een tweede

(Fourier)term zoals: $v = \bar{v} \sin \frac{3\pi x}{L}$ wordt het resultaat nagenoeg perfect. Zie ook de

opmerkingen hiervoor bij de bespreking over de oplossingen van Vandepitte [11].

Ook wordt aandacht besteed aan enkele bijzondere onderwerpen, zoals niet-lineair gedrag, staven met variabele doorsnede, niet- vormvaste doorsneden (bijvoorbeeld I-profielen met slap lijf, open dunwandige profielen), verende steunpunten en het ophijzen van balken.

Veel uitkomsten worden gepresenteerd in de vorm van grafieken.

Het resultaat van alle formules en berekeningen is zeer bruikbaar om de kritische belasting van elke variant te vinden. De consequenties met betrekking tot 2^{de}-orde effecten en bijbehorende spanningen worden niet uitgewerkt.

**[24a] Lohse, G.,
Kippen
Düsseldorf, 1997**

Deze publicatie over kippen is overzichtelijk, duidelijk en uitgebreid en wiskundig zeer eenvoudig. Er wordt direct van uitgegaan dat de vervormingen in de 'sterke' = stijfste richting en alle 2^{de}-orde momenten van M_y verwaarloosbaar klein zijn en dat er slechts verplaatsingen v in de 'zwakke' richting en de rotaties φ om de staafas in rekening zijn te brengen. De interacties tussen de momenten van de 1^{ste}-orde (ten gevolge van de belastingen) M_{y1} en de momenten van de 2^{de}-orde M_{z2} en M_{t2} leiden daardoor tot slechts twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen:

$$M_{z2} = M_{y1}\varphi$$

$$M_{t2} = M_{y1}v'$$

Vervolgens lost L. deze d.v.'s op door voor de vervormingen eenvoudige vergelijkingen op te stellen van de aard:

$$v \text{ of } \varphi = a + b\left(\frac{x}{L}\right) + c\left(\frac{x}{L}\right)^2 + d\left(\frac{x}{L}\right)^3 + e\left(\frac{x}{L}\right)^4$$

Met deze vijf termen worden alle voorkomende vervormingslijnen benaderd.

Alleen de enkele wiskundig eenvoudige gevallen van een constant moment en/of een axiale drukkracht worden opgelost met de bekende sinus- en cosinusformules.

Voor andere gevallen worden tabellen gegeven.

De berekening van vervormingen op willekeurige punten worden uitgevoerd met de methode van virtuele arbeid volgens Mohr, gebaseerd op de stellingen van Castigliano en de wederkerigheidsformules van Maxwell. Hiervoor wordt een aantal handige integratietabellen gegeven.

Door van vijf punten (begin, kwart, midden, drie-kwart en eind van de staaf) de waarden voor v of φ te berekenen ontstaat een stelsel van vijf vergelijkingen met vijf onbekenden (de constanten a t/m e). Voor de oplossing hiervan heeft L. een aantal computerprogrammaatjes geschreven, die bij zijn boek meegeleverd kunnen worden.

Toegepast wordt dit alles op twee-zijdig vrij opgelegde liggers met gaffels, uitkragingen, gevallen met verhinderde welving, liggers met zijdelingse steun bij de buigtrekzone, met (elastische) kipsteun en met elastische gaffels, in beton en staal. Ook de berekening van (buig)spanningen van de 1^{ste}-orde en de 2^{de}-orde wordt.

Een groot aantal voorbeelden completeert het geheel, waarbij wordt aangesloten aan de Duitse DIN normen.

Al met al een zeer interessante benadering.

Wel heeft deze methode het nadeel dat steeds die computerprogrammaatjes nodig zijn voor elk nieuw belastinggeval.

[24b] Lohse, G.,
Einführung in das Knicken und Kippen
Düsseldorf, 1994

Dit handige en overzichtelijk zakboekje is eigenlijk een uittreksel van [24a].

Het biedt naast een zeer beknopte theorie van knikken en kippen, praktische tabellen en voorbeelden van staal volgens DIN 18800 en hout volgens DIN 1052.

[28] Pauli, W.,
Versuche zur Kippstabilität an praxisgerechten Fertigteilträgern
aus Stahlbeton und Spannbeton
dissertatie, Darmstadt, 1990

Hoewel balken van gewapend- of voorgespannen beton meestal voorkomen in combinatie met vloeren die zijdelingse vervorming verhinderen, worden er ook geavanceerde constructies ontworpen met slanke profielen die kipgevoelig zijn.

In zijn dissertatie onderzoekt P. of de gebruikelijke kiptheorieën die voor hout en staal worden toegepast ook voor beton kunnen worden benut. Daartoe zijn enkele hoge, smalle standaard T-profielen met grote lengten en variërend in afmetingen, wapening en voorspanning berekend en beproefd. Vooral werd aandacht besteed aan de relatie tussen scheurvorming en vermindering van buig- en torsiestijfheid. De werkelijke torsiestijfheid bleek duidelijk minder te zijn dan berekend in ongescheurde toestand, maar anderzijds meer dan berekend in gescheurde toestand.

De invloed van de voorspanning op de 'kipsterkte' bleek zeer gering te zijn.

Het betreffende onderzoek was niet uitgebreid genoeg om definitieve aanbevelingen met betrekking tot de torsiestijfheid te doen. Om nu toch de gebruikelijke kippberekeningen ook bij beton te kunnen toepassen worden enkele benaderende voorstellen gedaan, gecombineerd met aanbevelingen voor toekomstig onderzoek.

- [29] **Erp, G.M. van,**
Advanced buckling analyses of beams with arbitrary cross sectio's,
 dissertatie, Eindhoven, 1989

Van E. behandelt in zijn dissertatie het knik- en kipgedrag van staven met willekeurige dunwandige profielen, zoals veel voorkomen in aluminium. Daartoe is een computerprogramma opgesteld waarmee ook verschijnselen als vervorming van de doorsnede en grote doorbuigingen in rekening kunnen worden gebracht.

- [30] **Hiemstra, P.,**
Voorstel stabiliteitscontrole op prismatische houten liggers met een rechthoekige dwarsdoorsnede
 Eindhoven, 2000

In dit voorstel wordt uitgegaan van de d.v.'s van Chen en Atsuta [10]. De oplossing hiervan leidt voor een constant moment zonder axiale drukkracht tot de 2^{de}-graads vergelijking:

$$\left(\frac{M_{y1}}{M_{kip}} \right)^2 = \frac{1}{n_z^*}$$

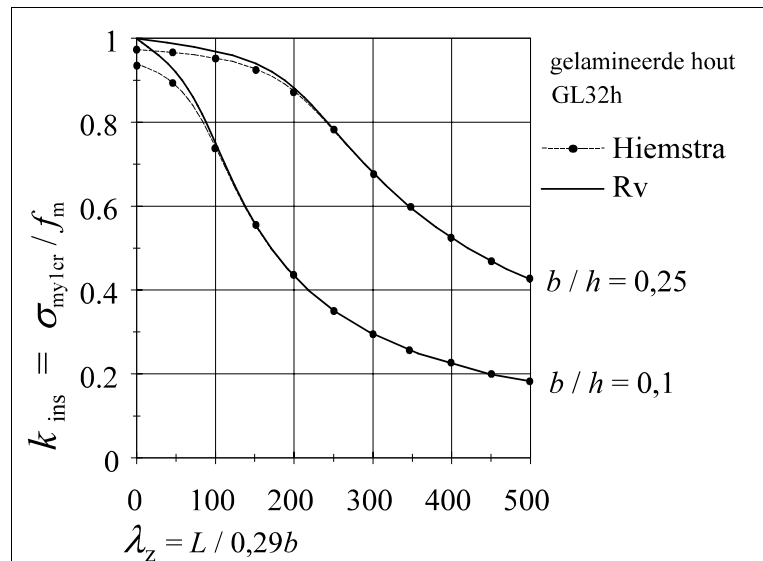
Als dit wordt ingevoerd in het voor hout gangbare spanningscriterium ontstaat een 3^{de}-graads vergelijking, waarin een term voorkomt van de vorm:

$$\frac{1}{n-1} = \frac{x^2}{1-x^2} \quad \text{waarin: } x = \frac{M_{y1}}{M_{kip}}, \text{ die door H. wordt benaderd als: } \frac{x}{2(1-x)}$$

Dit is vrij nauwkeurig, mits de waarde x niet (te) veel van 1 verschilt. Hierdoor ontstaat tenslotte een vierkantsvergelijking, met als onbekende de instabiliteitsfactor: k_{ins} , die (zeer verrassend) door deze benadering (nagenoeg) dezelfde formuleopbouw krijgt als de in NEN6760 voorkomende knikfactor k_{com} .

Voor enkele liggerdoorsneden van gelamineerd hout zijn de berekende waarden van k_{ins} weergegeven in figuur B1.15.

De resultaten voor van k_{ins} volgens H. komen goed overeen met de berekeningen met de in deze dissertatie ontwikkelde methode, met iets veiliger waarden voor k_{ins} bij kleine slankheden.



figuur B1.15

De toetsformules volgens H. gaan verder uit van een lineaire verhouding tussen belastingen en spanningen en bieden daardoor geen mogelijkheid om de 2^{de}-orde effecten in rekening te brengen.

- [31] **Eggen, T.E.,**
Buckling and geometrical nonlinear beam-type analyses of timber structures
 dissertatie, Trondheim, 2000

Veel mogelijkheden die computerprogramma's bieden om complexe problemen voor betrouwbare berekening toegankelijk te maken heeft E. in zijn dissertatie benut om de kipstabiliteit van houten liggers te analyseren. In het eerste deel van dit werk worden de nodige niet-lineaire balkelementen ontwikkeld en ingepast in een eindige elementenprogramma. In het tweede deel worden diverse balken en kolommen met diverse belastingen doorgerekend, waarna de uitkomsten worden vergeleken met klassieke theorieën (zoals van Timoshenko), de Noorse Norm (NS 3470-1) en de Eurocode EC 5.

Uitgebreid wordt ingegaan op het gedrag van prismatisch en tapse staven op twee steunpunten, zijdelings ongesteund en met verende steunconstructies en combinaties van knik en kip. Als voorbeeld wordt een casestudie uitgevoerd van een loods overspannen door acht gekoppelde portalen van kolommen en liggers.

Besloten wordt met het presenteren van enige ontwerpformules en aanbevelingen ter verbetering van zowel EC 5 als NS3470.

-
- [32] **Trahair, N.S., Bradford, M.A., Nethercot, D.A.,**
The behaviour and design of steel structures to BS5950.
London, 2001

Hierin komen hoofdstukken voor over constructies belast door druk, buiging enz. In het kader van deze dissertatie zijn van belang de hoofdstukken: 3. Compression members, 6. Lateral buckling of beams en 7. Beam-columns. Er worden nauwelijks mechanica-afleidingen gegeven, maar wel veel formules en grafieken, die zijn ontleend aan literatuur. Een en ander wordt verduidelijkt met enkele rekenvoorbeelden.

- [35] **Raven, W.J.,**
Vuistregels
Delft, 2003

Deze handleiding is bedoeld om bouwkundige- en constructieve ontwerpers tijdens het maken van schetsontwerpen hulp te bieden bij het bepalen van de afmetingen van draagconstructies. Uitgaande van de bepalingen van de TGB-1990 wordt een samenhangend overzicht gegeven van de in rekening te brengen belastingen en de daaruit volgende consequenties voor de afmetingen van vloeren, balken en kolommen in hout, staal en beton. Hierbij zijn verder geen grafieken, tabellen of computerprogramma's nodig, want alle gegevens zijn verzameld op slechts één blad A4-formaat.

- [36] **Hoogenboom, P.C.J., Haug, N.,**
Kip van houten liggers
Delft, 2005

In zijn afstudeeronderzoek heeft N. Haug (TU-Delft, faculteit CitG) de bevindingen van deze dissertatie vergeleken met de uitkomsten van de algemeen toegepaste en betrouwbaar geachte Eindige-Elementen-Methode. De belangrijkste resultaten zijn, vooruitlopend op het definitieve afstudeerverslag, door dr.ir. P.C.J. Hoogenboom alvast beschikbaar gemaakt. In Bijlage 8 wordt hiervan een overzicht gegeven.

- [39] **Raven, W.J.,**
Van knikken en kippen tot buigen en barsten
Arnhem, 2001

Dit artikel werd geschreven om de berekeningen van knik en kip in houtconstructies overzichtelijker te maken in vergelijking met de bepalingen daarover in de Norm NEN 6760. De studie daartoe vormde de aanzet om in een dissertatie deze onderwerpen verder uit te diepen.

NORMEN:**[42b] NEN 6760 Houtconstructies - TGB 1990**

De voor deze dissertatie van belang zijnde bepalingen over stabiliteit van staven zijn vooral opgenomen in de norm hoofdstuk 11.

art. 11.14 Kip en torsieknik

Met voorwaarden van toepassing, met eisen aan de (gaffel)opleggingen.

Toetsingscriterium voor buigspanningen: $\sigma_m \leq k_{ins} f_m$. Hierin is k_{ins} (instability) een (met een knikfactor vergelijkbare) modificatiefactor, die wordt bepaald met behulp van de slankheid van de staaf, de verhouding breedte/hoogte, de buigsterkte en de buig- en torsiestijfheid van de doorsnede.

De maatgevende buigspanning kan worden gereduceerd (vergelijkbaar met de factor k_1 in deze dissertatie). Hiertoe wordt in rekening gebracht de gemiddelde buigspanning over de middelste helft van de staaf. In bijlage C van NEN 6760 wordt hiervoor ook een tabel gegeven. Het gevolg hiervan is dat er bij de sterkte-toets (te) lage buigspanningen in rekening kunnen worden gebracht. Uitgaande van de kritieke buigspanning (kipsterkte) σ_{mer} (die afhankelijk wordt gesteld van de excentriciteit van de belasting) wordt de factor k_{ins} bepaald. Uitkragingen worden geschematiseerd als twee maal zo lange vrij opgelegde staven met reactiekracht nul aan de einden.

11.15 Prismatische staven belast op druk en buiging (kip en knik om de 'zwakke' as).

Met toetsformules en bepalingen betreffende de knikfactor k_{com} (compression) en een hulpfactor ten behoeve van de toetsformules. De factor k_{com} wordt bepaald met behulp van de slankheid van de staaf, de buig- en druksterkte, de buigstijfheid van de doorsnede en de initiële excentriciteit.

11.16 Niet-prismatische staven belast met druk en druk met buiging.

Bevat een uiterst (te) veilige toetsformule voor tapse staven, waarin wordt uitgegaan van alle mogelijke omstandigheden die in deze ongunstige combinatie zich nooit kunnen voordoen. Zie voor uitgebreidere behandeling hiervan: Werkgroep C, Driescharnierspanten [34].

11.17 Zijdelings gesteunde staven

Bevat berekening van de krachten op steunconstructies en de stabiliteit van staven belast op druk en buiging (knik om de 'sterke' as) met aparte behandeling van steun in het drukgebied of in de trekzone van de gesteunde ligger.

11.18 *Vlakke raamwerken*

Bevat uitsluitend aanwijzingen voor het in rekening brengen van initiële vervormingen met toelichtingen betreffende drie-scharnierspanten en enkele vereenvoudigingen. Aan de berekening van de krachtverdeling wordt verder geen aandacht besteed, zodat hiervoor de toegepaste mechanica en/of het gebruik van een computerprogramma, met de mogelijkheid om 2^{de}-orde berekeningen te maken, moet worden ingezet.

11.19 *Geknikte liggers*

Bevat enkele aanvullende bepalingen betreffende druk- en buigspanningen onder een hoek met de vezelrichting.

14 en 15 *Overige gevallen*

Bevat nog enkele bepalingen met betrekking tot de (deel)stabiliteit van samengestelde staven.

[42c] NEN 6770 Staalconstructies TGB 1990 - basiseisen en basisrekenregels

Bepalingen over stabiliteit van staven zijn opgenomen in de norm in hoofdstuk 10 over de rekenmethode en in hoofdstuk 12 over de toetsing van de stabiliteit voor basisgevallen. Ingewikkelde gevallen komen aan de orde in NEN 6771.

art. 10 *Rekenmethode*

Met bepalingen over de schematisering van de constructie, rekenmodellen, doorsneden, in rekening te brengen imperfecties, krachtsverdeling en toetsing van de bruikbaarheidsgrenzen.

12 *Toetsing van de stabiliteit*

12.1 *Op druk belaste staven*

Hierin bepalingen over: knikstabiliteit, (relatieve) slankheid, kniklengte (met enkele schema's en een nomogram), de knikfactor ω_{buc} (te bepalen met een grafiek, een tabel of een formule, afhankelijk van de profielkeuze), starre steunen, samenstelsels van meerdere gekoppelde staven en de invloed daarvan op steunconstructies en staven in vakwerken.

Alle toetsingsregels zijn geformuleerd als U.C. Voor druk moet zijn voldaan aan:

$$\frac{F_c}{\omega_{buc} F_u} \leq 1 \quad \text{wat ook te schrijven is als:} \quad \frac{\sigma_c}{\omega_{buc} f_u} \leq 1 \quad \text{of:} \quad \sigma_c \leq \omega_{buc} f_u .$$

Voor: torsie en torsieknik, verend gesteunde staven wordt verwezen naar NEN 6771.

12.2 Op buiging belaste staven (kipstabiliteit)

Kipberekeningen zijn in dit algemene deel van NEN 6770 zeer eenvoudig:

Allereerst worden enkele gevallen gedefinieerd waarbij een kipberekening achterwege kan worden gelaten. Voor ongecompliceerde gevallen wordt een eenvoudige toetsformule gegeven, waarbij (vergelijkbaar met knik) eveneens een relatieve slankheid wordt ingevoerd. Hiervoor wordt een (voor I-profielen geldige) benaderingsformule gegeven.

Voor meer ingewikkelde en bijzondere gevallen wordt verwezen naar NEN 6771.

Verder wordt aandacht besteed aan steunvoorzieningen en opleggingen.

12.3 Op druk en buiging belaste staven

Allereerst wordt het toepassingsgebied van deze Norm weer beperkt tot eenvoudige gevallen.

De toetsformules blijven beperkt zolang kan worden volstaan met een 1^{ste}-orde berekening.

Voor meer ingewikkelde en bijzondere gevallen wordt weer verwezen naar NEN 6771.

[42d] NEN 6771 Staalconstructies TGB 1990 - stabiliteit

Dit deel van de TGB 1990 Staalconstructies is geheel gewijd aan het onderwerp stabiliteit en bevat hiervoor uitgebreide toetsingsregels. De eerste 11 hoofdstukken bevatten enige aanvullingen op NEN 6770 en hoofdstuk 13 behandelt plooiestabiliteit van platen. Voor deze dissertatie is vooral van belang hoofdstuk 12 en daarin hoofdzakelijk de bepalingen over kip- en torsieknikstabiliteit.

art. 12.1 Op druk belaste staven

Hierin komen uitbreidingen voor van de bepalingen van NEN 6770 voor meer ingewikkelde situaties, torsie voor bijzondere profielen, verend gesteunde staven, vakwerkstaven en samengestelde staven.

12.2 Op buiging belaste staven (kipstabiliteit)

Hierin wordt het toepassingsgebied uitgebreid ten opzichte van NEN 6770.

Vergelijkbaar met de bepalingen over de knikstabiliteit wordt ingevoerd een relatieve slankheid betreffende kipstabiliteit:

$$\lambda_{rel} = \sqrt{\frac{M_u}{M_{kip}}}$$

Voor het kipmoment worden formules gegeven, waarin (voor staalprofielen belangrijke) aspecten, als vormvastheid van de doorsnede en de bijdrage van de verhinderde welving aan de torsiestijfheid, zijn verwerkt.

De aard en de eventuele excentriciteit van de belasting kunnen in rekening worden gebracht met reductiecoëfficiënten C_1 en C_2 waarvoor tabellen en/of formules worden gegeven.

12.3 Op druk en buiging belaste staven

Hierin zijn toetsformules opgenomen, waarin de invloeden zijn verwerkt van momentverdeling, knik, kip. De 2^{de}-orde effecten door de verhouding tussen drukkracht en Eulerse kniklast zijn in rekening gebracht door de bekende vergrotingsfactor:

$$\frac{n}{n-1}$$

De invloed van kip wordt in rekening gebracht door een constante kipfactor ω_{kip} . Tenslotte volgen nog enkele toetsregels voor gecompliceerde gevallen, waarbij de constructie in twee richtingen vervormt en er dus een drie-dimensionale berekening nodig is.

12.4 Op trek en buiging belaste staven

Er hoeft niet op stabiliteit te worden getoetst als er uitsluitend trekspanningen optreden. Zo niet dan moet getoetst worden met weglating van de trekkracht.

[43] Eurocode EC5 Design of timber structures

De EC 5 biedt enkele zeer eenvoudige regels voor de berekening van de stabiliteit van op buiging en/of normaalkracht belaste balken en kolommen.

Hoofdstuk 6.2 bevat bepalingen over gecombineerde belastingen met druk-, trek-, schuif- en buigspanningen, waarbij getoetst wordt met sterktecriteria.

In hoofdstuk 6.3 wordt de stabiliteit van staven behandeld.

Op druk belaste staven (kolommen) behoeven alleen op knik en (indien van toepassing) op knik met buiging te worden gecontroleerd.

Geïntroduceerd wordt het begrip 'relatieve slankheid':

$$\lambda_{\text{rel}} = \sqrt{\frac{f_c}{\sigma_{Ez}}} = \frac{\lambda_z}{\pi} \sqrt{\frac{f_c}{E}}$$

Dit is vergelijkbaar met λ_{rel} in NEN 6770 TGB-staal. (en de reciproque kwadratische term k_{Ez} in NEN 6760 TGB-hout).

Met behulp van λ_{rel} wordt een 'knikfactor' k_c berekend die nagenoeg overeenkomt met de door Blass [16] ontwikkelde knikfactor, met k_{com} uit NEN 6760 en met de stabiliteitskrommen uit NEN 6770.

Zijdelings niet gesteunde staven moeten op kip (en bij aanwezigheid van drukkrachten tevens op knik loodrecht op de richting van de zijdelingse belasting) worden gecontroleerd.

De gehanteerde formules voor de kipstabiliteit zijn bijzonder eenvoudig. De kritische kipspanning wordt berekend uit het 'klassieke kritisch kipmoment'. De aard en een eventuele excentriciteit van de belasting worden verwerkt door een 'reductie' op de in rekening te brengen staaflengte. Hiervoor wordt een tabelletje gegeven.

Aan de relatieve slankheid met betrekking tot kip wordt de reductiefactor k_{crit} ontleend.

Merkwaardig is overigens dat bij de bepaling van de kipsterkte de initiële excentriciteit van de staaf niet in rekening wordt gebracht.

De controleformule om de stabiliteit te toetsen bestaat uit een lineaire drukcomponent en een kwadratische buigcomponent.

In EC 5 komen verder geen bepalingen voor betreffende 2^{de}-orde effecten.

TABELLEN en GRAFIEKEN

[44] **Staalprofielen** Amsterdam, 1980

Bevat (bijna) alle gewenste statische grootheden voor de meest gangbare staalprofielen met een korte verklaring.

[45] **Stamme, P.,** **Kipscherheisnachweis** Düsseldorf, 1981

Bevat tabellen voor op 2 steunpunten vrij opgelegde balken van stalen I-profielen met een belasting op de boven- of de onderflens met overspanningen vanaf: 2 m olopend met 0,5 m tot 20 m.

[46] **Young, Warren C.,** **Roark's formulas for stress and strain** New York, 1989

In dit standaardwerk is een overweldigende hoeveelheid formules verzameld op het gebied van de toegepaste mechanica ontleend aan standaardwerken. Uitgebreide literatuurlijst.

In het kader van deze dissertatie zijn te noemen de hoofdstukken 9, 11 en vooral 14, die gegevens bevatten over: torsie, drukstaven (knik) en elastic stability (kip).

Hier volgt een overzicht van de, voor de onderwerpen knik en kip, meest relevante gegevens:

9. Torsie, profielgrootheden

doorsnede	torsietraagheidsmoment I_t in: $\varphi = \frac{M_t L}{GI_t}$ of: $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_t}$	torsieweerstandsmoment W_t in: $\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$
massieve rechthoek bh	$I_t = \frac{b^3 h}{3} \left\{ 1 - 0,63 \frac{b}{h} \left(1 - \frac{b^4}{12h^4} \right) \right\}$	$W_t = \frac{0,333b^2 h}{1 + 0,61 \frac{b}{h} + 0,89 \left(1 - \frac{b}{h} \right)^2}$
voor zeer kleine b	$I_t = \frac{b^3 h}{3}$	$W_t = \frac{b^2 h}{3}$
dunwandige rechthoekige buis	$I_t = \frac{2t_b t_h (h - t_b)^2 (b - t_h)^2}{t_b (h - t_b) + t_h (b - t_h)}$	$W_t = 2t_b (h - t_b)(b - t_h)$ t.p.v. midden b $W_t = 2t_h (h - t_b)(b - t_h)$ t.p.v. midden h
als $t =$ overal gelijk	$I_t = \frac{2t(h - t)^2 (b - t)^2}{(h - t) + (b - t)}$	$W_t = 2t(h - t)(b - t)$ overal
I - profiel	$I_t = \frac{1}{3} (2t_f^3 b + t_l^3 h)$ $I_w = \frac{t_f b^3 h^2}{24}$ of: $I_w = \frac{I_z h^2}{4}$	$\bar{\tau}_1 = Gt_f \varphi'$ overal langs de omtrek $\bar{\tau}_2 = -\frac{b^2 h}{16} E \varphi'''$ midden van de flens $\bar{\sigma} = \frac{bh}{4} E \varphi''$ hoekpunten van de flens

Verder worden vergelijkingen gegeven voor op torsie belaste staven met alle mogelijke varianten:

Torsiemoment	1. constant	over de gehele lengte over een deel van de lengte
	2. gelijkmatig aangroeiend	over de gehele lengte over een deel van de lengte
Staafeinden	1. rotatie:	vrij verhinderd (gaffel)
	2. welving:	vrij verhinderd (volledig ingeklemd)

11. Op druk belaste staven

Behalve de formule van Euler worden nog een aantal (benaderende) knikformules gegeven. Verder een tabel met plaats, vorm en afmetingen van de 'kern' ($r = W/A$) van diverse doorsneden.

Bij de combinatie van druk en buiging komt ook voor de toetsregel inclusief 2^{de}-orde effecten:

$$\frac{\sigma_c}{f_c} + \frac{C\sigma_m}{f_m \left(1 - \frac{\sigma_c}{f_E}\right)} \leq 1$$

14. Elastic stability

In dit hoofdstuk wordt een grote hoeveelheid handige formules gegeven voor: kniklengten, knikbelastingen in diverse situaties, zoals typen van bevestiging (inklemmingen, scharnieren enz.) van staafenden, constante en variabele stijfheden, combinaties van axiale belasting op het eind en op een willekeurige plaats langs de staaf.

In tabel 34 worden voor diverse gevallen kritische kipbelastingen gegeven: ontleend aan: 1. Timoshenko 1936, 3. Trayer + March (1931) en 4. Dumont + Hill (1937).

ligger op 2 steunpunten met gaffels	constant moment	rechthoekige doorsnede	$M_{kip} = \frac{\pi b^3 h}{6L} \sqrt{EG \left(1 - 0,63 \frac{b}{h}\right)}$
		I-profiel	$M_{kip} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_{tor} \left(1 + \frac{\pi^2 EI_z h^2}{4GI_{tor} L^2}\right)}$
	puntlast in het midden	rechthoekige doorsnede (formule 13)	$F_{z,crit} = \frac{2,82Eb^3h}{L^2} \left(\sqrt{\frac{G}{E} \left(1 - 0,63 \frac{b}{h}\right)} + 1,74 \frac{e}{L} \right)$ <p>N.B. deze formule is foutief overgenomen van Timoshenko [6b] en zou moeten zijn:</p> $F_{z,crit} = \frac{2,82Eb^3h}{L^2} \left(\sqrt{\frac{G}{E} \left(1 - 0,63 \frac{b}{h}\right)} + 0,87 \frac{e}{L} \right)$ <p>e = hoogte aangrijpingspunt t.o.v. hart ligger (positief in de richting waarin F_z werkt)</p>
	I-profiel	$F_{z,crit} = \frac{16,93}{L} \sqrt{EI_z GI_{tor}} \left\{ 1 + 2,66 \left(\frac{EI_z h^2}{GI_{tor} L^2} \right)^{0,8} \right\}$ <p>(geen gegevens over excentrische belasting)</p>	

vervolg ligger op 2 steun- punten met gaffels	gelijkmatig verdeelde belasting	rechthoekig e doorsnede (formule 13)	$Q_{z,crit} = \frac{4,71Eb^3h}{L^2} \left(\sqrt{\frac{G}{E} \left(1 - 0,63 \frac{b}{h} \right)} + 1,74 \frac{e}{L} \right)$ <p>door dezelfde fout als hiervoor zou dit moeten zijn:</p> $Q_{z,crit} = \frac{4,71Eb^3h}{L^2} \left(\sqrt{\frac{G}{E} \left(1 - 0,63 \frac{b}{h} \right)} + 0,87 \frac{e}{L} \right)$
		I-profiel	geen gegevens
uitkra- ging	constant moment		geen gegevens
		puntlast aan het eind	$F_{z,crit} = \frac{0,67Eb^3h}{L^2} \left(\sqrt{\frac{G}{E} \left(1 - 0,63 \frac{b}{h} \right)} + 0,5 \frac{e}{L} \right)$
		I-profiel	$F_{z,crit} = \frac{4,01}{L} \sqrt{EI_z GI_{tor}} \left\{ 1 + 2,92 \sqrt{\frac{EI_z h^2}{4GI_{tor} L^2}} \right\}$
	gelijkmatig verdeelde belasting	rechthoekig e doorsnede (formule 12)	$Q_{z,crit} = \frac{2,01Eb^3h}{L} \left(\sqrt{\frac{G}{E} \left(1 - 0,63 \frac{b}{h} \right)} + 0,5 \frac{e}{L} \right)$
I-profiel		geen gegevens	

[47] Raven, W.J. et al,
Houtconstructies 4, tabellen en grafieken
 Almere, herzien 2001

Dit dictaat, bestemd voor HTO en HBO, is kort na de verschijning van NEN 6760 geschreven om te voorzien in actueel studiemateriaal. Het bestaat uit vier delen:

1. (vooral mechanische) Materiaaleigenschappen,
2. Ontwerpen en construeren in hout en toepassing van de richtlijnen,
3. Toepassingsvoorbeelden en
4. Tabellen en grafieken, waarin de uitkomsten van zeer veel formules zijn weergegeven.

Vooral de grafieken bieden een duidelijk inzicht in het verloop van diverse factoren als k_{com} , k_{mom} , k_{ins} en dergelijke en maken (mede daardoor) een aanzienlijke besparing op rekenwerk mogelijk.

Bijlage

2

**Rechte staven
belast op
centrische druk****B2.1 Vervorming onder invloed van druk**

Een rechte staaf belast door een centrische axiaalkracht zonder dwarsbelasting(en) is te beschouwen als een bijzonder stabiliteitsgeval waarbij kip is uitgesloten maar wel knik kan optreden. Er wordt hier aandacht aan besteed omdat bij de analyse van de kipstabiliteit voor een deel gebruik wordt gemaakt van knikberekeningen. Vooral de interactie tussen 1^{ste}-orde-, 2^{de}-orde- en eindvervormingen is geheel vergelijkbaar.

N.B. In alle overige hoofdstukken is onderscheid gemaakt in y - en z -richting met bijbehorende verplaatsingen v en w , maar omdat in deze Bijlage uitsluitend tweedimensionale situaties worden beschouwd kan dit onderscheid hier verder achterwege blijven. Daarom wordt hier de index y bij de momenten weggelaten en worden de uitbuigingen aangeduid met v .

Uitgangspunt is dat elke 'rechtbedoelde' staaf door diverse oorzaken toch een zekere initiële uitbuiging v_0 heeft. Soms kan de in rekening te brengen waarde hiervan worden ontleend aan een voorgeschreven 'top'waarde (zoals in NEN 6760). Soms kan dit indirect worden afgeleid uit een imperfectieparameter (zoals in NEN 6771) of uit een coëfficiënt β_c (zoals in EC 5). In NEN 6760 wordt verder nog bepaald dat een sinusvormig verloop moet worden aangehouden. (Zie ook Hoofdstuk 3.3 aannamen 4, 5 en 6).

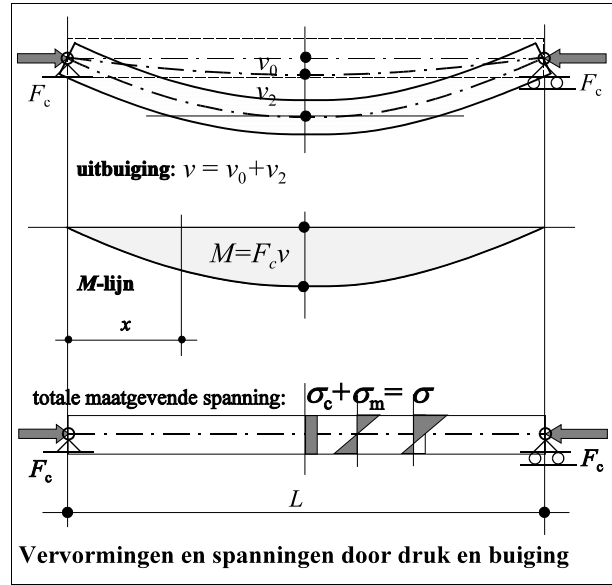
De in de normen voorkomende bepalingen over de initiële vervormingen van staven en hun invloed op de knikstabiliteit kunnen ook worden toegepast bij de beschouwingen over kipstabiliteit. Daarom volgt hier een beknopte vergelijking hoe een en ander bij de meest gebruikelijke materialen, hout, staal en beton, is geregeld.

De behandeling van het verschijnsel knik blijft hier beperkt tot het basisgeval van een rechte staaf die momentvrij scharnierend aan beide einden (waarvan één roloplegging) is bevestigd. Zie figuur B2.1.

Een staaf kan een axiale belasting dragen tot ergens in de staaf de berekende spanning de rekenwaarde van de sterkte van het materiaal wordt bereikt. Onderzocht worden nu plaats en grootte van de optredende spanningen.

Door de interactie tussen drukkracht en vervorming ontstaat een M -lijn die geheel gelijkvormig is aan de v -lijn en (nagenoeg) gelijkvormig aan de v_2 -lijn:

$$M = F_c v \quad (\text{B2.01})$$



figuur B2.1

Zolang de elasticiteitstheorie geldt kunnen de hieruit volgende druk- en buigspanningen worden gesuperponeerd, maar omdat bij sommige materialen de druksterkte en de buigsterkte verschillend zijn is het overzichtelijk om het resultaat te toetsen met een 'unity-check' (UC):

$$\frac{\sigma_c}{f_c} + \frac{\bar{\sigma}_m}{f_m} \leq 1 \quad (\text{B2.02})$$

Uit de sterkteleer volgt dan:

$$\bar{\sigma}_m = \frac{\bar{M}}{W} = \frac{F_c \bar{v}}{Ar} \quad (\text{B2.03})$$

waarin: A = oppervlak van de doorsnede en: $r = \frac{W}{A}$ (B2.04)

Van belang is hier dus de totale uitbuiging v die volgt uit: $\bar{v} = \bar{v}_0 \frac{n^*}{n^* - 1}$ (B2.05)

N.B. Vanwege de eenheid van notatie wordt in deze dissertatie overal de term n^* met ster* geschreven, hoewel dat bij twee-dimensionale gevallen van druk en buiging ook zonder ster* zou kunnen.

De door het moment veroorzaakte 2^{de}-orde uitbuiging kan (bij gelijkvormigheid van M -lijn en verplaatsingslijn) worden berekend met:

$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{M}L^2}{\pi^2 EI} = \frac{F_c \bar{v} L^2}{\pi^2 EI} \quad (\text{B2.06})$$

waaruit, in overeenstemming met de afleidingen in Hoofdstuk 4.1, volgt:

$$n^* = \frac{\bar{v}}{\bar{v}_2} = \frac{\pi^2 EI}{F_c L^2} \quad (\text{B2.07})$$

Hierin is herkenbaar de bekende knikformule volgens Euler: $F_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ (B2.08)

die na invoering van de 'slankheid': $\lambda = \frac{L}{i} = L \sqrt{\frac{A}{I}}$ (B2.09)

ook is te schrijven in spanningsnotatie: $\sigma_E = \frac{F_E}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ (B2.10)

Voor gedrukte staven volgt de term n^* dus uit:

$$n^* = \frac{F_E}{F_c} = \frac{\sigma_E}{\sigma_c} \quad (\text{B2.11})$$

N.B. De term n^* komt voor twee-dimensionale gevallen dus geheel overeen met de algemeen bekende 2^{de}-orde term n die bij knikstabiliteit een belangrijke rol speelt.

De stabiliteit en de sterkte kunnen nu samen worden getoetst in twee stappen:

	krachten en momenten	spanningen	
1. bereken n^* uit (B2.11)	$n^* = \frac{F_E}{F_c}$	$n^* = \frac{\sigma_E}{\sigma_c}$	(B2.12)
2. toets met de UC (unity check):	$\frac{F_c}{F_u} + \frac{F_c \bar{v}}{M_u} \leq 1$	$\frac{\sigma_c}{f_c} + \frac{\sigma_c \bar{v}}{f_m r} \leq 1$	(B2.13)

Hiertoe moeten zijn voorgeschreven, aangenomen of berekend:

- f_E de Eulerse kniksterkte (berekend uit de stijfheid en de slankheid van de staaf),
- f_c de druksterkte van het materiaal,
- f_m de buigsterkte van het materiaal,
- $r = W/A$ de kernstraal van de doorsnede,
- \bar{v}_0 de initiële uitbuiging, die is te ontleen aan de betreffende normen, afhankelijk van het materiaal,
- \bar{v} de totale uitbuiging, die volgt uit (B2.05).

a. Slankheid

Het begrip slankheid, zoals hiervoor is gehanteerd, wordt ook gebruikt in NEN 6760 (hout).

Als hulpterm komt hier voor: $k_E = \frac{\sigma_E}{f_c}$ (B2.14)

In EC5 (hout) en NEN 6770 (staal) wordt ingevoerd het begrip relatieve slankheid:

$$\lambda_{rel} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_c}{E}} = \sqrt{\frac{f_c}{\sigma_E}} \quad (\text{B2.15})$$

Dit komt overeen met: $\frac{1}{\sqrt{k_E}}$ uit NEN 6760.

In NEN 6720 (Voorschriften beton) wordt onder het begrip slankheid verstaan: $\lambda = \frac{L}{h}$.

b. Initiële uitbuiging

De in rekening te brengen initiële uitbuiging, die afhankelijk is van het materiaal en de nauwkeurigheid waarmee het tot rechte staven kan worden verwerkt, varieert van:

$$v_0 = \text{ca. } L / 1000 \text{ à } L / 250 \quad (\text{B2.16})$$

Ter indicatie volgt een globaal overzicht:

hout	EC5	NEN 6760	staal NEN 6770		beton NEN 6720
gelamineerd	1/1000	1/500	smalle I-profielen	1/1000 à 1/500	1/300
gezaagd	1/500	1/300	brede I-profielen	1/ 700 à 1/250	

c. Materiaalsterkte

Omdat de rekendruksterkte soms is bepaald met behulp van proefstukken met een bepaalde slankheid (vaak: $\lambda = \text{circa } 20$) geldt de hierbij gemeten druksterkte als rekenwaarde.

In de knikberekeningen is dat te verdisconteren door:

- òf: de rekendruksterkte bij $\lambda = 0$ te verhogen tot: $f_{c0} = k_{20} f_c$.

$$\text{(zoals in NEN 6760 waar geldt: } k_{20} = 1 + 20\eta = 1 + 20 \frac{i}{r} \frac{\bar{v}_0}{L} = 1 + 20\sqrt{3} \frac{\bar{v}_0}{L}$$

$$\text{voor gelamineerd hout: } k_{20} = 1 + 34,9 / 500 = 1,067$$

$$\text{voor gezaagd hout: } k_{20} = 1 + 34,9 / 300 = 1,115$$

- òf: de initiële uitbuiging bij $\lambda = \text{circa } 20$ gelijk aan 0 (nul) te stellen en bij grotere slankheden deze geleidelijk aan te passen met b.v.: $v_0 / r = k_\lambda (\lambda - 20)$.
(zoals in NEN 6770, NEN 6771 en EC 5, waar overigens wordt gewerkt met het begrip 'relatieve' slankheid, wat hierna ter sprake zal komen.)

Beide methoden blijken tot nagenoeg dezelfde resultaten te leiden.

B2.2 Bepaling knikfactor

Knikinstabiliteit wordt dus veroorzaakt door het optreden van extra buigspanningen, die een deel van de materiaalsterkte verbruiken, waardoor er minder 'druk'draagvermogen overblijft. De 'knikfactor' die in de gangbare normen wordt ingevoerd suggereert echter (wellicht onbedoeld) een vermindering van de druksterkte en biedt slechts met behulp van uitgebreide grafieken en/of tabellen een vereenvoudiging van het praktische rekenwerk. Ter vergelijking volgt hier een nadere analyse van deze knikfactor.

In de maatgevende doorsnede van de uitgebogen staaf wordt getoetst of de som van de drukspanning en de 2^{de}-orde buigspanning de materiaalsterkte niet overschrijdt. Om te berekenen hoe groot de drukspanning maximaal mag zijn om dat te bereiken kan worden 'teruggerekend' via de volgende procedure:

Start met de U.C. volgens (B2.02):

$$\frac{\sigma_c}{k_{20} f_c} + \frac{\sigma_c}{f_m} \frac{\bar{v}_0}{r} \frac{n^*}{n^* - 1} \leq 1 \quad (\text{B2.17})$$

Met (B2.11) is dit te schrijven als:

$$\frac{\sigma_c}{k_{20} f_c} + \frac{\sigma_c}{f_m} \frac{\bar{v}_0}{r} \frac{1}{1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_E}} \leq 1$$

Dit is te rangschikken tot:

$$\frac{\sigma_c}{f_c} \frac{f_c}{f_m} \frac{v_0}{r} \leq \left(1 - \frac{\sigma_c}{k_{20} f_c}\right) \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_E}\right)$$

Hieruit volgt een vierkantsvergelijking, die in de uiterste grenstoestand nul wordt: $\left(\frac{\sigma_c}{f_c}\right)^2 \frac{f_c}{k_{20} \sigma_E} - \left(\frac{\sigma_c}{f_c}\right) \left(\frac{1}{k_{20}} + \frac{f_c}{\sigma_E} + \frac{f_c}{f_m} \frac{v_0}{r}\right) + 1 \geq 0$

Dit is eenvoudiger te schrijven door hulptermen in te voeren:

$$k_A = \frac{f_c}{k_{20} \sigma_E} \quad \text{en:} \quad k_B = \frac{1}{k_{20}} + \frac{f_c}{\sigma_E} + \frac{f_c}{f_m} \frac{v_0}{r}$$

De normen verschillen in de formulering van deze hulptermen, maar het principe verandert daardoor niet.

De oplossing van de vierkantsvergelijking is de gezochte knikfactor:

$$k_{knik} = \frac{\sigma_c}{f_c} = \frac{k_B - \sqrt{k_B^2 - 4k_A}}{2k_A} \quad (\text{B2.18})$$

De oplossing volgens EC 5 is iets afwijkend omdat wordt gewerkt met de reciproque waarde van de knikfactor:

Met $k_{20}=1$ en na vermenigvuldigen met:

$$\frac{1}{k_{knik}^2} = \left(\frac{f_c}{\sigma_c} \right)^2 \text{ volgt} \quad \frac{f_c}{\sigma_E} - \left(\frac{f_c}{\sigma_c} \right) \left(1 + \frac{f_c}{\sigma_E} + \frac{f_c}{f_m} \frac{v_0}{r} \right) + \left(\frac{f_c}{\sigma_c} \right)^2 = 0$$

Dit is weer eenvoudiger te schrijven door hulptermen in te voeren:

$$\lambda_{rel}^2 = \frac{f_c}{\sigma_E} \quad \text{en:} \quad \beta_c = 0,5 \left(1 + \frac{f_c}{\sigma_E} + \frac{f_c}{f_m} \frac{v_0}{r} \right)$$

$$\text{waarin:} \quad \frac{f_c}{f_m} \frac{v_0}{r} = \beta_c (\lambda_{rel}^2 - 0,3)$$

$$\text{met: voor gelamineerd hout:} \quad \beta_c = 0,1$$

$$\text{voor gezaagd hout:} \quad \beta_c = 0,2$$

De vierkantsvergelijking wordt dan:

$$\frac{1}{k_{knik}^2} - \frac{2\beta_c}{k_{knik}} + \lambda_{rel}^2 = 0$$

met als (eenvoudig ogende) oplossing:

$$k_{knik} = \frac{1}{\beta_c + \sqrt{\beta_c^2 - \lambda_{rel}^2}} \quad (\text{B2.19})$$

De oplossing volgens NEN 6770 is nagenoeg identiek aan de hiervoor ontwikkelde 'standaardmethode':

Met $k_{20}=1$ en $\lambda_{rel}^2 = \frac{f_c}{\sigma_E}$ wordt de

vierkantsvergelijking:

$$\left(\frac{\sigma_c}{f_c} \right)^2 \lambda_{rel}^2 - \left(\frac{\sigma_c}{f_c} \right) \left(1 + \lambda_{rel}^2 + \frac{f_c}{f_m} \frac{v_0}{r} \right) + 1 = 0$$

Omdat de druk- en de buigsterkte bij staal gelijk zijn kan de term met de initiële excentriciteit worden geschreven als:

$$\frac{f_c}{f_m} \frac{v_0}{r} = \frac{v_0}{r} = \alpha_k (\lambda_{rel}^2 - 0,2)$$

met (voor gewalste I-profielen, afhankelijk van de afmetingen van de doorsnede): $\alpha_k = 0,21 \text{ 'a } 0,49$

Als hulpfactor kan worden ingevoerd:

$$k_B = 1 + \alpha_k (\lambda_{rel}^2 - 0,2) + \lambda_{rel}^2$$

De knikfactor wordt dan:

$$k_{knik} = \frac{k_B - \sqrt{k_B^2 - 4\lambda_{rel}^2}}{2\lambda_{rel}^2} \quad (\text{B2.20})$$

Dus, afgezien van verschillen in notaties en definities van initiële uitbuigingen, is voor hout en staal dezelfde methode te gebruiken om de knikfactor te bepalen.

Bij beton is de gang van zaken geheel anders, maar het eindresultaat blijkt toch verrassend vergelijkbaar te zijn.

De beginexcentriciteit e_0 wordt in principe ontleend aan de uit de mechanica berekende verhouding: moment / drukkracht, met een minimum van: $e_0 = L / 300$.

Op deze e_0 wordt, volgens de zo genoemde ' e_c -methode', een toeslag in rekening gebracht, die toeneemt met (de hier genoemde slankheid) L/h , die onafhankelijk is van E en f_c ,

De GTB 1990 (Grafieken en Tabellen voor Betonconstructies) bevatten series grafieken voor buiging en normaalkracht waarin de relaties tussen drukspanning en totale excentriciteit (in rekening te brengen uitbuiging) worden weergegeven, met inachtneming van betondekking, scheurvorming en wapeningspercentage. Uit de grafieken 10 en 12 is de relatie tussen drukspanning, excentriciteit, buigspanning en wapeningspercentage af te lezen.

Zie figuur B2.2:

Voor een representatieve kolom met een wapeningspercentage van 2 à 3 zijn de in rekening te brengen relaties nagenoeg lineair te benaderen met:

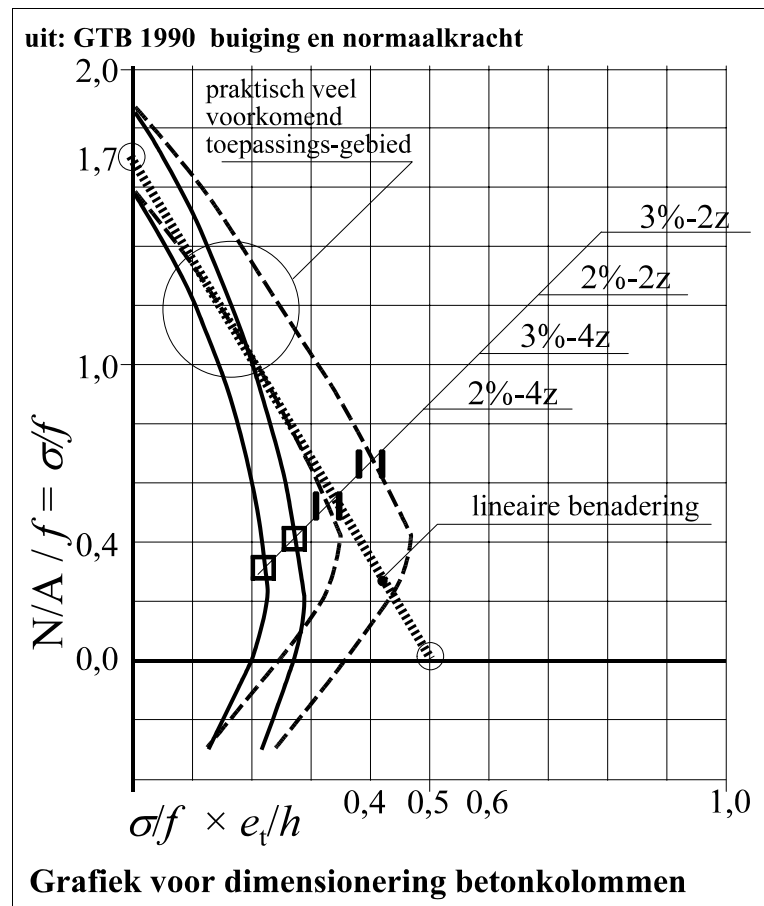
$$\frac{\sigma_c}{f'_b} + \frac{\sigma_c}{0,5 h} e_t = 1$$

of:

$$\frac{f'_b}{\sigma_c} = 0,59 + 2 \frac{e_t}{h}$$

De 'effectieve' druksterkte f_c wordt, door de bijdrage van de wapening, vergroot met een factor: 1,7:

$$f_c = f'_b \left(1 + \frac{0,025 \times 435}{15} \right) \approx 1,7 f'_b$$



figuur B2.2

Hieruit volgt als 'knikfactor':

$$\frac{\sigma_c}{f_c} = \frac{\sigma_c}{1,7 f'_b} = \frac{1}{1,7 \left(0,59 + 2 \frac{e_t}{h} \right)} = \frac{1}{1 + 3,4 \frac{e_t}{h}} \tag{B2.21}$$

Voor rechthoekige doorsneden is volgens NEN 6720 de toeslagexcentriciteit:

$$e_c = 3(1,5h + e_0) \left(\frac{L}{100h} \right)^2 \quad (\text{B2.22})$$

De totale in rekening te brengen excentriciteit is dan:

$$e_t = e_0 + e_c = \frac{L}{300} + 3 \left(1,5h + \frac{L}{300} \right) \left(\frac{L}{100h} \right)^2 = \frac{L}{300} + \left(4,5h + \frac{L}{100} \right) \left(\frac{L}{100h} \right)^2 \quad (\text{B2.23})$$

De relatie tussen slankheid en knikfactor is nu met (B2.17) te benaderen als:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_c}{f_c} &= \frac{1}{1 + 3,4 \frac{e_t}{h}} = \frac{1}{1 + 3,4 \frac{e_0 + e_c}{h}} = \frac{1}{1 + 3,4 \left\{ \frac{L}{300h} + 4,5 \left(\frac{L}{100h} \right)^2 + \left(\frac{L}{100h} \right)^3 \right\}} = \\ &= \frac{1}{1 + 1,13 \frac{L}{100h} + 15,3 \left(\frac{L}{100h} \right)^2 + 3,4 \left(\frac{L}{100h} \right)^3} \end{aligned}$$

Als (zoals gebruikelijk in de mechanica) wordt geschreven: $\lambda = \frac{L}{i} = \frac{L}{0,289h}$

volgt als knikfactor voor beton:

$$\boxed{\frac{\sigma_c}{f_c} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{306} + \left(\frac{\lambda}{88} \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{230} \right)^3}} \quad (\text{B2.24})$$

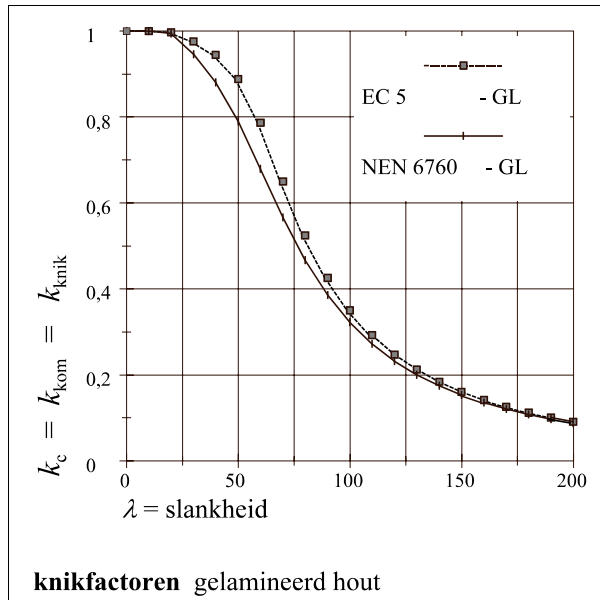
Bij de gebruikelijke verhoudingen van betonkolommen met $L/h < 20$ is de bijdrage van de laatste term in de noemer minder dan 1,5% en dus nagenoeg altijd verwaarloosbaar. Daarmee zou (B2.23) nog enigszins kunnen worden vereenvoudigd, maar (vooruitlopend op het vervolg) wordt dat hier achterwege gelaten.

B2.3 Vergelijking van kolommen in hout, staal en beton

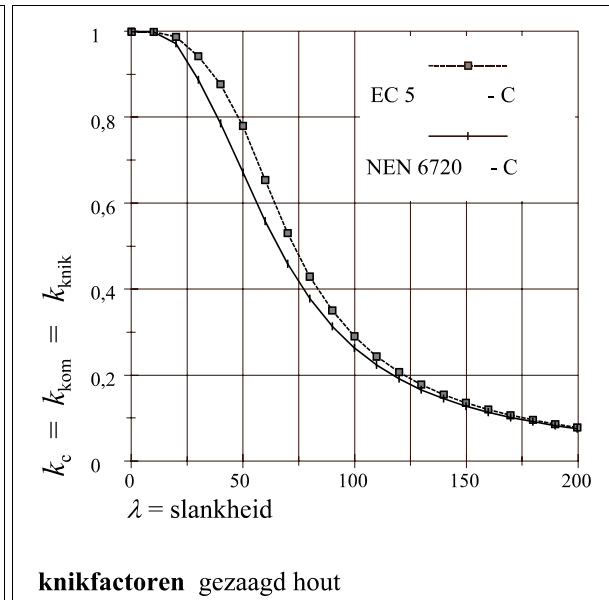
Ondanks de genoemde verschillen in notaties en uitgangspunten leiden alle resultaten tot vergelijkbare uitkomsten, zoals wordt getoond in de volgende grafieken:

a. Hout:

Voor gelamineerd hout GL32 en gezaagd hout C18 zijn de knikfactoren berekend volgens NEN 6760 en EC 5 en weergegeven in de figuren B.2.3 en B2.4.



figuur B2.3



figuur B2.4

De grotere knikfactoren volgens EC 5 ten opzichte van NEN 6760 (bij kleinere slankheden) worden vooral veroorzaakt doordat volgens EC 5 (veel) kleinere initiële uitbuigingen in rekening zijn te brengen dan volgens NEN 6760.

De grotere knikfactoren bij gelamineerd hout (GL) ten opzichte van gezaagd hout (C) zijn het gevolg van de hogere E-modulus ten opzichte van de druksterkte (zie ook formule (B2.25)).

Wanneer voor dezelfde sterkteklassen uitgegaan zou worden van dezelfde initiële uitbuigingen ontstaat een nagenoeg gelijk resultaat. De invoering van: $v_0 = 0$ bij $\lambda_{rel} = 0,2$ en dus: $\lambda = ca. 20$ (volgens EC 5) ten opzichte van een factor: $k_{20} = 1+20\eta$ (volgens NEN 6760) leidt niet tot verschillen van enige betekenis.

Door een en ander goed op elkaar af te stemmen blijkt het dus zeer goed mogelijk te zijn om met beide normen op dit gebied identieke resultaten te bereiken

b. Staal

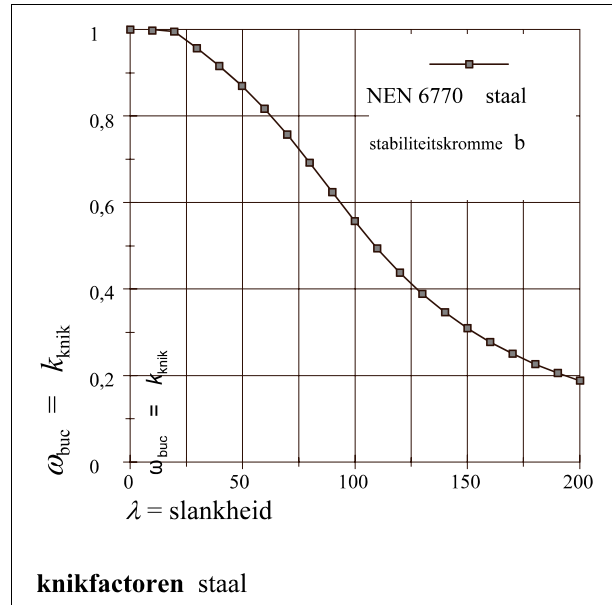
Voor de berekening van de knikfactoren volgens NEN 6770 worden een grafiek, een tabel en een formule (B2.20) gegeven, die alle zijn gebaseerd op de hiervoor behandelde toetsmethode volgens de U.C.. Daardoor geven ze alle dezelfde resultaten.

Voor veel voorkomende gevallen (HE 400 A of B en hoger of IPE, waarbij stabiliteitskromme b volgens tabel 23 in NEN 6770 behoort) is een initiële uitbuiging terug te rekenen van ongeveer: $v_0 = L / 700$. De hierbij behorende knikkromme is afgebeeld in figuur B2.5

N.B. Op de horizontale as is uitgezet de 'gewone' slankheid volgens de mechanica.
De waarde hiervan is bijna 100 maal zo groot als de in de norm gehanteerde 'relatieve' slankheid:

$$\frac{\lambda_{\text{mechanica}}}{\lambda_{\text{rel}}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{235}{210000}} = \frac{1}{94}$$

Opvallend zijn de veel hogere waarden van de knikfactor (in NEN 6770 genoemd ω_{buc}) ten opzichte van hout bij vergelijkbare slankheden. De oorzaak hiervan is de zeer hoge waarde van de E -modulus ten opzichte van de sterkte.



figuur B2.5

Ter vergelijking de verhoudingen tussen E en f bij: hout GL en C en staal:

$$\frac{E}{f} = \frac{11100}{32} : \frac{6000}{18} : \frac{210000}{235} = 347 : 333 : 894 \quad (\text{B2.25})$$

Bij zeer hoge slankheden, waar de stijfheid bepalend is, zijn bij staal dus ongeveer $894/340 = 2,5$ maal zo grote knikfactoren te verwachten dan bij hout. Dit is in overeenstemming met de waarden bij $\lambda = 175$, waar gevonden wordt bij hout: $k_{\text{knik}} = \text{circa } 0,10$ en bij staal: $k_{\text{knik}} = 0,24$.

c. Beton

Met behulp van de hiervoor ontwikkelde benaderingsformule (B2.24) is voor beton eveneens een knikfactor te bepalen.

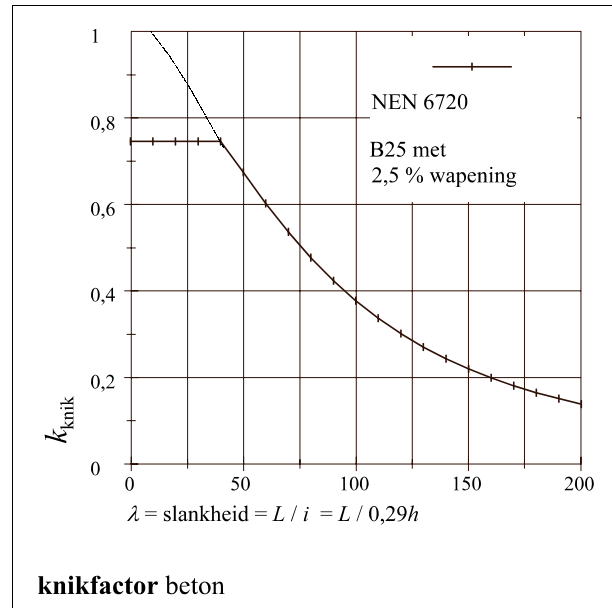
Als voorbeeld is het resultaat voor een betonkolom B25 met 2,5 % wapening weergegeven in figuur B2.6.

Opvallend is dat de knikfactor bij kleine slankheden tot ongeveer 35 nog beperkt blijft tot een waarde van 0,75. Dit is te verklaren uit de (in NEN 6720 voorgeschreven) minimaal in rekening te brengen verhouding tussen de totale excentriciteit en de hoogte van de doorsnede: $e_t / h \geq 0,1$.

N.B. In de figuur wordt (evenals bij staal) op de horizontale as uitgezet de 'gewone' slankheid volgens de mechanica.

De waarde hiervan is bijna 3,5 maal zo groot als de in NEN 6720 gehanteerde slankheid:

$$\frac{\lambda_{\text{mechanica}}}{\lambda_{\text{NEN 6720}}} = \frac{L/i}{L/h} = \frac{1}{0,289} = 3,46$$



figuur B2.6

Vermeldenswaard is dat (vergelijkbaar met de mogelijkheden bij hout en staal) bij beton eveneens een knikkromme kan worden toegepast volgens de in deze dissertatie ontwikkelde methode. Daartoe kan de algemene formule worden gebruikt maar nu met aangepaste constanten. Na enig zoeken is daarvoor gevonden:

$$\frac{E}{f_c} = \frac{20000}{1,7 \times 15} = 784 \quad (\text{B2.26})$$

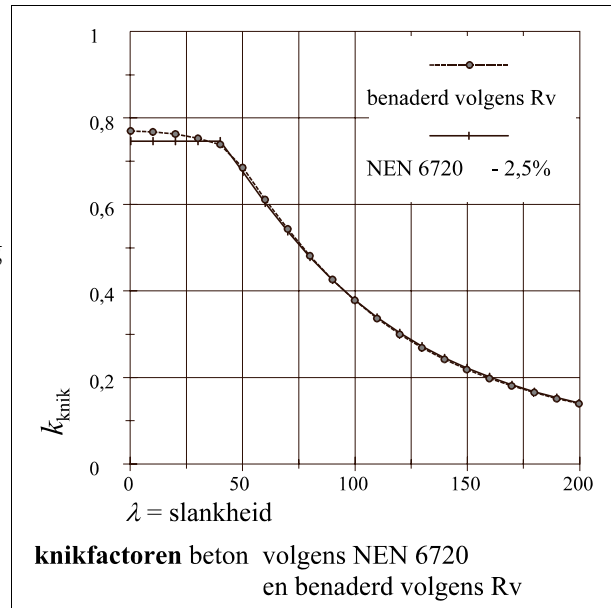
$$\lambda_{\text{rel}} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f}{E}} = \frac{L}{0,289h\pi} \sqrt{\frac{1}{784}} = \frac{L}{25h} \quad (\text{B2.27})$$

$$\frac{v_0}{r} = \begin{cases} 0,85(\lambda_{\text{rel}} - 0,15) \\ \text{of:} \\ \frac{L}{30h} - 0,13 \end{cases} \quad \text{maar niet kleiner dan } 0,1 \quad (\text{B2.28})$$

N.B. Het voorgaande is zeker niet bedoeld om de methodiek van wapeningberekening volgens de GTB-grafieken te vervangen, maar om te tonen dat het knikgedrag van beton in principe geheel vergelijkbaar met dat van hout en staal kan worden bepaald.

Het verdient aanbeveling om, met behulp van de GTB-grafieken en/of de daaraan ten grondslag liggende computerprogramma's, nader te onderzoeken welke parameters (bij de verschillende betonkwaliteiten en wapeningspercentages) moeten worden gekozen om tot de beste resultaten te komen.

Het verrassende resultaat van toepassing van de hier ontwikkelde methode is een knikkromme zoals getekend in figuur B2.7. De afwijking is nergens meer dan circa 1% van de uit NEN 6720 volgende vorm zoals afgeleid in formule (B2.24). Hierbij is zelfs de voorgeschreven begrenzing van $e_t \geq 0,1h$ zeer nauwkeurig verwerkt.



Conclusie:

figuur B2.7

Voor op druk belaste staven (kolommen) van hout, staal en beton is een geheel identieke en eenvoudige berekening van de knikveiligheid mogelijk, die tot dezelfde resultaten leidt als de methoden die in de huidige normen worden voorgeschreven.

Knikberekeningen zijn zonder grafieken of tabellen (behalve het opzoeken van de statische gegevens van staalprofielen) in een overzichtelijke procedure van zes stappen uit te voeren:

1. bepaal:
$$F_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

2. bepaal:
$$n^* = \frac{F_E}{F_c}$$

3. bepaal: \bar{v}_0 volgens norm (zie tabel in B2.1) of bij beton met formule (B2.28)

4. bepaal:
$$M_{2\text{deorde}} = F_c \bar{v} = F_c \bar{v}_0 \frac{n^*}{n^* - 1} = \frac{F_E \bar{v}_0}{n^* - 1}$$

5. bepaal: $F_u = A f_c$ en: $M_u = W f_m$

6. toets met:
$$\frac{F_c}{F_u} + \frac{M_{2\text{deorde}}}{M_u} \leq 1$$

Bijlage

3 Torsiestijfheid

De berekening van het kritisch kipmoment is gebaseerd op de buigstijfheid in de 'zwakke' richting en de torsiestijfheid van de doorsnede. Hierbij is er steeds van uitgegaan dat de torsie ϕ evenredig is met het torsiemoment M_t .

Dit is echter alleen voldoende nauwkeurig bij een sinus- of cosinusvormig verloop van de rotatie, zoals bij een tweezijdig opgelegde staaf met een (nagenoeg) cosinusvormig verlopend torsiemoment. Zie de M_t -lijnen in Hoofdstuk 5.1.

Onderzocht wordt nu of en wanneer dit ook voor andere omstandigheden kan worden aangehouden, zoals bij ingeklemde staven op twee steunpunten en uitkragingen.

B3.1 Torsiemoment en torsiestijfheid

In het algemeen bestaat het torsiemoment uit drie componenten, die worden geleverd door:

1. De 'zuivere' torsieweerstand (volgens De St.Venant) van de doorsnede, waarbij uitsluitend schuifspanningen optreden en de doorsnede roteert en ongehinderd kan welven.
2. De invloed van de normaalkracht F_c op de torsie (volgens het Wagner-effect).
3. De welvingsweerstand van de staaf, veroorzaakt door de buigweerstand van de flenzen, waardoor er naast schuifspanningen ook normaalspanningen optreden en de doorsneden door verschillen in verplaatsing van boven- en onderzijde eveneens roteren.
De welvingscomponent heeft het karakter van een randstoring die vooral invloed heeft in een (klein) gedeelte van de staaf nabij de (ingeklemde) opleggingen, maar die toch de rotatie in het midden van de staaf (aanzienlijk) kan verminderen.

Het totale torsiemoment kan worden geschreven als:

$$M_t = M_{tor} + M_{tF} + M_{tw} \quad (\text{B3.01})$$

Hierin is de 'zuivere' torsiecomponent:

$$M_{tor} = GI_{tor} \phi' = W_{tor} \bar{\sigma}_{tor} \quad (\text{B3.2})$$

Het torsietraagheidsmoment en het torsieweerstandmoment zijn alleen voor cirkelvormige doorsneden eenvoudig te berekenen, maar voor alle andere doorsnedevormen is hulp van tabellen of computerprogramma's nodig.

Voor rechthoekige doorsneden zijn bekend de benaderingsformules:

$$I_{tor} = \frac{b^3 h}{3} \left(1 - 0,63 \frac{b}{h} \right) \text{ respectievelijk: } W_{tor} = \frac{b^2 h}{3 \left(1 + 0,2 \frac{b}{h} \right)} \quad (\text{B3.03a})$$

Voor (zeer) smalle doorsneden is dit te vereenvoudigen tot:

$$I_{tor} = \frac{t^3 h}{3} \text{ respectievelijk: } W_{tor} = \frac{t^2 h}{3} \quad (\text{B3.03b})$$

Het torsietraagheidsmoment voor de totale doorsnede van een I-profiel (met verwaarlozing van de bijdrage van het lijf) is dan:

$$I_{tor} = \frac{2t_{fl}^3 b}{3} \quad (\text{B3.03c})$$

Aan Vuistregels [35] is een globale benadering van de flensdikte te ontleen:

$$\begin{array}{|l} A = 0,12bh \\ I_y = 0,021bh^3 \\ I_z = 0,007b^3h \end{array} \text{ waaruit volgt: } t_{fl} = \text{gemiddelde van } \left| \frac{0,007b^3h \frac{12}{2b^3}}{0,021bh^3} \right| = 0,044h \quad (\text{B3.04})$$

Om verschillende I-profielen met elkaar te kunnen vergelijken is dan voldoende bruikbaar:

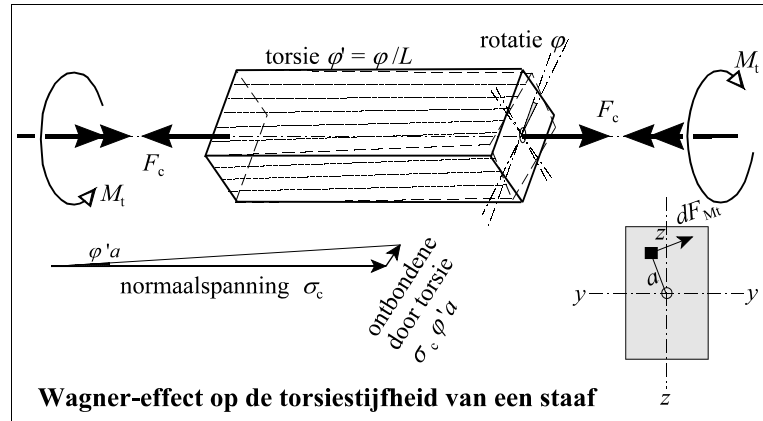
$$I_{tor} = \frac{2t_{fl}^3 b}{3} = \frac{(0,044h)^3 b}{1,5} = \frac{bh^3}{18000} \quad (\text{B3.05})$$

Voor praktische constructieberekeningen zijn nauwkeurige gegevens te ontleen aan tabellen zoals [44].

Een beknopte analyse van de beide andere componenten is te ontleen aan figuur B3.1, wat betreft het Wagner-effect en figuur B3.2, wat betreft de invloed van de verhinderde welving.

a. *Het Wagner-effect*

De aanwezigheid van een axiale kracht heeft invloed op de torsiestijfheid. Bij een trekkracht verzet de staaf zich enigszins tegen torsie en wordt de effectieve torsiestijfheid groter (en bij een drukkracht kleiner).



figuur B3.1

Het door de normaalkracht en de rotatie veroorzaakte deel van het torsiemoment volgt uit:

$$dM_{tF} = dF_{MtF} a = \varphi' a^2 dz dy$$

$$M_{tF} = \int dF_{MtF} a = \sigma \varphi' \iint a^2 dz dy = \sigma \varphi' I_{polair} = \frac{F}{A} \varphi' (I_y + I_z) = \varphi' K_w \quad \text{B3.06}$$

waarin de 'Wagner-coëfficiënt' voor een axiale drukkracht is gedefinieerd als:

$$K_w = \frac{F I_p}{A} = -\frac{F_c I_p}{A} = -\frac{F_c (I_y + I_z)}{A} = -\sigma_c (I_y + I_z) \quad \text{(B3.07)}$$

Dit is geen constante factor maar een term die afhankelijk is van de normaalspanning. De invloed hiervan kan, vooral bij smalle staven, ten opzichte van GI_{tor} relatief nog vrij groot zijn. Een hoge drukspanning leidt dus tot een verlaging van de torsiestijfheid. Overigens zal dit voornamelijk het geval zijn bij korte, brede staven, omdat bij slanke staven de drukspanning laag moet blijven vanwege de knikstabiliteit.

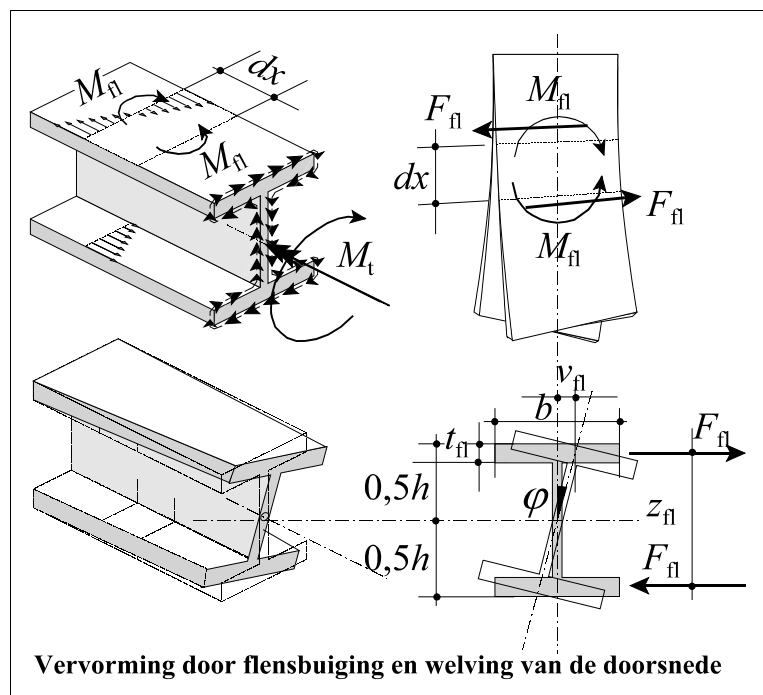
De 'welvings'component wordt geleverd door de flensbuiging (zie figuur B3.2) die over het gehele verloop van de staaf aanwezig is en sterk wordt beïnvloed door de randvoorwaarden aan het begin en eind van de staaf, waar een inklemming tot grotere stabiliteit leidt dan een gaffeloplegging, zoals uit het vervolg zal blijken.

b. De invloed van de verhinderde welving

Het flensbuigingsmoment M_{fl} wordt geleverd door een koppel van reactiekrachten:

$$F_{fl} = \frac{dM_{fl}}{dx} = \frac{d(-EI_{fl}v_{fl}'')}{dx} = -EI_{fl}v_{fl}''' \quad (B3.08)$$

Bij een vormvaste doorsnede geldt: $\varphi = \frac{v_{fl}}{0,5z_{fl}}$ dus: $v_{fl}''' = 0,5z_{fl}\varphi'''$ (B3.09)



figuur B3.2

Met benaderingen van:

$$I_{flz} \approx 0,5I_z \quad \text{en:} \quad z_{fl} \approx h$$

wordt de 'welvings'component:

$$M_{tw} = F_{fl}z_{fl} \approx -EI_{fl} \times 0,5h\varphi'''h = -0,25EI_z h^2\varphi''' = -EI_w\varphi''' \quad (B3.10)$$

waarin het welvingstraagheidsmoment dus benaderd is als:

$$I_w = 0,25I_z h^2 \quad (B3.11)$$

Exacte waarden kunnen desgewenst worden ontleend aan tabellen zoals [44].

Daarmee wordt het totale torsiemoment in relatie met de rotatie geschreven als:

$$M_t = GI_{tor}\varphi' + K_w\varphi' - EI_w\varphi''' \quad (\text{B3.12})$$

Met: $\beta^2 = \frac{EI_w}{GI_t}$ (wat in de literatuur soms voorkomt als: $\frac{1}{\lambda^2}$) wordt dit:

$$M_t = GI_{tor} \left(\varphi' + \frac{K_w}{GI_{tor}}\varphi' - \frac{EI_w}{GI_{tor}}\varphi''' \right) = GI_{tor}\varphi' \left(1 + \frac{K_w}{GI_{tor}} - \beta^2 \frac{\varphi'''}{\varphi'} \right) \quad (\text{B3.13})$$

Als de rotatie φ bekend is kan hieruit via eenmaal, respectievelijk driemaal differentiëren het torsiemoment met de welvingscomponent worden berekend. Het omgekeerde is (behalve bij een sinus- en/of cosinusvormig verloop) wiskundig analytisch veel lastiger.

Voor een tweezijdig opgelegde staaf met een sinus-vormig rotatieverloop geldt bijvoorbeeld:

$$\varphi = \bar{\varphi} \sin \frac{\pi x}{L} \quad \text{waaruit volgt: } \varphi' = \frac{\pi}{L} \bar{\varphi} \cos \frac{\pi x}{L}, \quad \varphi''' = -\frac{\pi^3}{L^3} \bar{\varphi} \cos \frac{\pi x}{L} \quad \text{en: } \frac{\varphi'''}{\varphi'} = -\frac{\pi^2}{L^2}$$

De relatie tussen torsiemoment en torsie wordt dan:

$$M_t = GI_{tor}\varphi' \left(1 + \frac{K_w}{GI_{tor}} + \frac{\beta^2 \pi^2}{L^2} \right) \quad (\text{B3.14a})$$

Dit betekent dus dat bij dezelfde rotatie en bij normaaltrekkkracht en verhinderde welving een groter moment kan worden opgenomen en omgekeerd, dat bij hetzelfde moment de rotatie minder wordt. Omdat bij de hier bedoelde stabiliteitsgevallen steeds wordt uitgegaan van axiale drukkrachten, die een vermindering van de torsiestijfheid geven, is de invloed van de 'Wagner'coëfficiënt negatief en wordt de effectieve in rekening te brengen torsiestijfheid geschreven met een vergrotingsfactor:

$$1 + \frac{K_w}{GI_{tor}} + \frac{\beta^2 \pi^2}{L^2} = 1 - C_{tF} + C_{tw} \quad (\text{B3.14b})$$

Vooral de factor C_{tw} is van grote invloed zoals uit het vervolg zal blijken.

$$C_{tw} = \frac{\beta^2 \pi^2}{L^2} = \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_{tor}} \quad (\text{B3.15})$$

Ter indicatie van de orde van grootte van de factoren C_{tF} en C_{tW} kunnen de volgende benaderingen voldoende inzicht bieden:

- Voor massieve rechthoekige houtconstructies:

$$C_{tF} = -\frac{K_w}{GI_{tor}} = -\frac{\sigma_c (I_y + I_z)}{GI_{tor}} = -\frac{\sigma_c}{G} \frac{3(bh^3 + b^3h)}{12b^3h} = -\frac{\sigma_c}{4G} \left(\frac{h^2}{b^2} + 1 \right) \quad (B3.16a)$$

$$C_{tW} = \frac{\pi^2 E}{L^2} \frac{1/160 b^3 h^3}{G \cdot 1/3 b^3 h (1 - 0,63 b/h)} \approx \frac{9,9}{L^2} \frac{16}{1} \frac{3h^2}{160 \times 0,9} \approx 3,3 \frac{h^2}{L^2} \quad (B3.16b)$$

- Voor stalen I-profielen zie (B3.04) en (B3.05) :

$$C_{tF} = -\frac{\sigma_c (I_y + I_z)}{GI_{tor}} \approx -\frac{\sigma_c (0,021bh^3 + 0,007b^3h)}{G \cdot 2/3 (0,044h)^3 b} = -123 \frac{\sigma_c}{G} \left(3 + \frac{b^2}{h^2} \right) \quad (B3.17a)$$

$$C_{tW} \approx \frac{\pi^2 E}{L^2} \frac{0,007b^3h \times 0,25h^2}{G \cdot 2/3 (0,044h)^3 b} = \frac{9,9}{L^2} \frac{1}{0,4} 30,8b^2 = 760 \frac{b^2}{L^2} \quad (B3.17b)$$

Uiteraard wordt de drukspanning altijd beperkt door de kniksterkte. Maar omdat er bij kippingen een vrij groot deel van het draagvermogen wordt gebruikt voor buigspanningen zal de drukspanning dus meestal (veel) minder zijn dan de helft van de kniksterkte. De verhouding tussen de drukspanning σ_c en de glijdingsmodulus G zal dus beperkt blijven tot:

$$\left. \begin{array}{l} \text{- Bij gelamineerd hout: } \frac{\sigma_c}{G} \leq \frac{0,5 \times 29}{700} = 0,0207 \\ \text{- Bij stalen I-profielen: } \frac{\sigma_c}{G} \leq \frac{0,5 \times 235}{84000} = 0,0014 \end{array} \right\} \text{tot veel minder bij slanke staven}$$

Voor enkele profielen en overspanningen zijn de berekende waarden van C_{tF} en C_{tW} verzameld in het volgende overzicht:

	hout						staal					
	$b/h = 0,2$		$b/h = 0,5$		$b/h = 0,7$		$b/h = 0,3$		$b/h = 0,7$		$b/h = 1,0$	
L/h	C_{tF}	C_{tW}	C_{tF}	C_{tW}	C_{tF}	C_{tW}	C_{tF}	C_{tW}	C_{tF}	C_{tW}	C_{tF}	C_{tW}
1/10	0,018	0,033	0,016	0,033	0,013	0,033	0,181	0,684	0,437	3,724	0,583	7,600
1/20	0,010	0,008	0,006	0,008	0,005	0,008	0,074	0,171	0,248	0,931	0,402	1,900
1/30	0,009	0,004	0,003	0,004	0,003	0,004	0,060	0,076	0,144	0,414	0,268	0,844

Bij korte staven zijn beide componenten het grootst. Bij de gangbare massieve houten doorsneden blijft de invloed van beide componenten beperkt tot enkele procenten en loont het dus niet of nauwelijks de moeite om ze in rekening te brengen en de ingewikkelder differentiaalvergelijkingen met de 3^{de} afgeleide op te lossen. Bij stalen I-profielen zijn alle componenten C_{tf} (veel) kleiner dan C_{tw} . Waar hun waarden elkaar benaderen zijn ze beiden zeer klein. Voor korte, brede staven is echter de verhinderde welving van (veel) grotere invloed dan de 'zuivere' torsieweerstand.

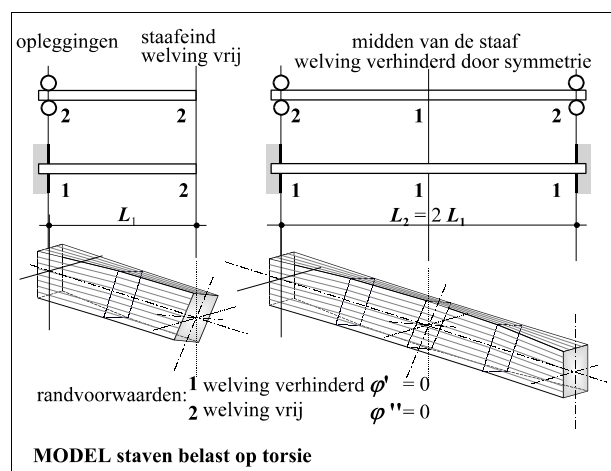
Conclusies met betrekking tot het Wagner-effect en de welvingscomponent:

1. Het is verantwoord (en tijd besparend) om hier in alle gevallen de invloed van de drukkracht op de torsiestijfheid te verwaarlozen, en bij houten staven eveneens de invloed van de verhinderde welving.
2. Bij stalen I-profielen kan door de verhinderde welving een aanzienlijke vergroting van de torsiestijfheid ontstaan. Dit is bovendien nog afhankelijk van de randvoorwaarden aan het begin en aan het eind van de staaf.
3. Het correct bepalen van de invloed van de welvingscomponent impliceert dat de term φ'' in de differentiaalvergelijking moet worden ingevuld en opgelost, hetgeen (bij andere dan zuivere sinus- en cosinuslijnen) praktisch alleen met behulp van een computer efficiënt is uit te voeren. Daarom zou het aantrekkelijk zijn om te zoeken naar een eenvoudige en betrouwbare benaderingsformule, waarmee de welvingsstijfheid als een vergrotingsfactor op de torsiestijfheid in rekening is te brengen.
4. Een nadere beschouwing is dus gewenst.

B3.2 Invloed van de welvingsstijfheid op de rotatie

Voor enkele modellen met aangenomen vormen van M_t -lijnen wordt nu nagegaan wat de gevolgen zijn voor de torsie met inachtneming van de welvingsstijfheid. Zie figuur B3.3:

1. Uitkraging: lengte L_1 .
bij de opleggingen varianten:
 - gaffel: welving vrij
 - inklemming, welving verhinderd,
 bij het staafeind geen varianten:
vrij roterend en vrij welvend
2. Twee-zijdig opgelegde staaf: $L_2 = 2L_1$
bij de opleggingen dezelfde varianten:
 - gaffel, welving vrij
 - inklemming, welving verhinderd
 in het staafmidden geen variant:
welving verhinderd (symmetrie)



figuur B3.3

Uit (B3.8) en volgende is af te leiden dat (aan het begin of eind) van een staaf:

a.	als welving niet wordt verhinderd en er ook geen reactiemoment M_{fl} kan optreden geldt aldaar: $v_{\text{fl}}'' = 0$ en dus ook: $\varphi'' = 0$ (een eventueel torsiemoment kan wel worden opgenomen)
b.	als welving (door een torsie-inklemming) wel geheel wordt verhinderd geldt aldaar: $v_{\text{fl}}' = 0$ en dus ook: $\varphi' = 0$ (een torsiemoment moet dan volledig worden opgenomen door de welvingscomponent)
c.	als er geen (uitwendig) torsiemoment optreedt of kan optreden (door de aard van de bevestiging) en dus: $M_t = 0$, geldt aldaar: $\varphi' - \beta^2 \varphi''' = 0$ (M_{tor} en M_{tw} heffen elkaar dan op)

Deze consequenties kunnen in voorkomende gevallen worden gebruikt als randvoorwaarden bij het oplossen van de vormveranderingsvergelijkingen.

Waar de staaf geheel is ingeklemd en de welving wordt verhinderd geldt:
 $v_{\text{fl}}' = 0$ en dus ook: $\varphi' = 0$ en uiteraard ook: $\varphi = 0$.

Als varianten in het verloop van de torsiemomenten-lijnen M_t worden gekozen:

1.(bolle) cosinus-lijn	zoals voorkomt bij de meeste belastinggevallen op een twee-zijdig opgelegde staaf, zie de figuren in Hoofdstuk 5.1.
2. (holle) sinus-lijn	zoals voorkomt bij een uitkraging, zie de figuren in Hoofdstuk 5.2.
beiden ook gecombineerd met een (klein) positief of negatief constant moment door een excentrisch aangrijpende belasting.	

Het gegeven (of aangenomen) M_t -verloop heeft dan de gedaante van:

$$M_t = \bar{M}_t (k_{m1} + k_{m2} \cos ax + k_{m3} \sin ax) \quad (\text{B3.18})$$

Hierin zijn de factoren k_{mi} afhankelijk van het aandeel van het constante deel van de momentenlijn.

De rotatie kan worden geschreven als:

$$\varphi = k_{\varphi 1} + k_{\varphi 2} x + k_{\varphi 3} \sinh bx + k_{\varphi 4} \cosh bx + k_{\varphi 5} \sin ax + k_{\varphi 6} \cos ax \quad (\text{B3.19})$$

De afgeleiden hiervan (waaronder de torsie) zijn:

$$\begin{aligned}
\varphi' &= k_{\varphi 2} + b(k_{\varphi 3} \cosh bx + k_{\varphi 4} \sinh bx) + a(k_{\varphi 5} \cos ax - k_{\varphi 6} \sin ax) \\
\varphi'' &= b^2(k_{\varphi 3} + \sinh bx + k_{\varphi 4} \cosh bx) - a^2(k_{\varphi 5} \sin ax + k_{\varphi 6} \cos ax) \quad (\text{B3.20a, b en c}) \\
\varphi''' &= b^3(k_{\varphi 3} + \cosh bx + k_{\varphi 4} \sinh bx) - a^3(k_{\varphi 5} \cos ax - k_{\varphi 6} \sin ax)
\end{aligned}$$

De constanten k_1 t/m k_4 volgen uit de randvoorwaarden en de overige constanten volgen uit de vorm van de (torsie)momenten-lijn.

Bij verwaarlozing van de factor K_w is (B3.13) te schrijven als:

$$\frac{M_t}{GI_{tor}} = \varphi' - \frac{EI_w}{GI_{tor}} \varphi''' = \varphi' - \beta^2 \varphi''' \quad (\text{B3.21})$$

Met (B3.20) leidt dit tot:

$$\frac{M_t}{GI_{tor}} = k_2 + b(1 - \beta^2 b^2)(k_3 \cosh bx + k_4 \sinh bx) + a(1 + \beta^2 a^2)(k_5 \cos ax - k_6 \sin ax)$$

Er kan uitsluitend overeenstemming zijn met de gegeven momenten volgens (B3.19) als de term met de factor b hierop geen invloed kan hebben, dus: $1 - b^2 \beta^2 = 0$, waaruit volgt:

$$b = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{GI_{tor}}{EI_w}} \quad \text{en:} \quad (\text{B3.22})$$

$$M_t = GI_{tor} \left\{ k_{\varphi 2} + a(1 + a^2 b^2)(k_{\varphi 5} \cos ax - k_{\varphi 6} \sin ax) \right\} \quad (\text{B3.23})$$

Uit gelijkstelling van de twee vergelijkingen van de M_t -lijn (B3.19) en (B3.23) zijn nu de constanten $k_{\varphi 2}$, $k_{\varphi 5}$ en $k_{\varphi 6}$ af te leiden:

$$k_{\varphi 2} = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}} k_{mt1} \quad k_{\varphi 5} = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}} \frac{k_{m2}}{a \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)} \quad k_{\varphi 6} = -\frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}} \frac{k_{m3}}{a \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)} \quad (\text{B3.24a,b,c})$$

De overige drie constanten: $k_{\varphi 1}$, $k_{\varphi 3}$ en $k_{\varphi 4}$ volgen uit de randvoorwaarden:

- bij het begin van de staaf, $x = 0$: rotatie = 0, dus: $\varphi = 0$
- waar welving wordt verhinderd: torsie = 0, dus: $\varphi' = 0$
- waar welving vrij plaats kan vinden: flensbuiging = 0, dus: $\varphi'' = 0$

$$x = 0: \quad \sin 0 = \sinh 0 = 0 \quad \cos 0 = \cosh 0 = 1$$

$$x = L_1 = 0,5L_2: \quad \sin aL_1 = \sin \frac{aL_2}{2} = 1 \quad \cos aL_1 = \cos \frac{aL_2}{2} = 0 \quad \text{dus: } a = \frac{\pi}{2L_1} \quad \text{of: } a = \frac{\pi}{L_2}$$

Invullen in de rotatievergelijking levert:

alle staven:	$\varphi = 0$	$k_{\varphi 1} + k_{\varphi 4} + k_{\varphi 6} = 0$	$k_{\varphi 1} = -(k_{\varphi 4} + k_{\varphi 6})$	(B3.25a)
bij: $x = 0$	als: $\varphi' = 0$	$k_{\varphi 2} + bk_{\varphi 3} + ak_{\varphi 5} = 0$	$k_{\varphi 3} = -(k_{\varphi 2} + ak_{\varphi 5}) / b$	(B3.25b)
	als: $\varphi'' = 0$	$b^2k_{\varphi 4} - a^2k_{\varphi 6} = 0$	$k_{\varphi 4} = a^2k_{\varphi 6} / b^2$	(B3.25c)
staaf op twee steunpunten bij: $x = 0,5 L_2$	$\varphi' = 0$	$k_{\varphi 2} + bk_{\varphi 3} \cosh(0,5bL_2) + bk_{\varphi 4} \sinh(0,5bL_2) - ak_{\varphi 5} = 0$		(B3.25d)
uitkraging bij: $x = L_1$	$\varphi'' = 0$	$b^2k_{\varphi 3} \sinh bL_1 + b^2k_{\varphi 4} \cosh bL_1 - a^2k_{\varphi 5} = 0$		(B3.25e)

Hiermee zijn voor de toe te passen gevallen alle constanten $k_{\varphi 1}$ tot en met $k_{\varphi 6}$ op te lossen en in de rotatievergelijking in te vullen. De uitkomsten zijn voor verschillende varianten van de stijfheidsverhoudingen berekend met Quattro-pro en met elkaar zijn vergeleken.

B3.3 Resultaten berekeningen

Onderzocht worden nu de volgende belastinggevallen:

1. Staaf op twee steunpunten belast door:	constant moment per staafhelft (door excentrische puntlast op of aan het staafmidden)	$M_t = \bar{M}_t$
	(bolle) cosinus-lijn:	$M_t = \bar{M}_t \cos \frac{\pi x}{L_2}$
2. Uitkraging belast door:	constant moment (door excentrische puntlast op of aan het staafeind)	$M_t = \bar{M}_t$
	(holle) sinus-lijn:	$M_t = \bar{M}_t \left(1 - \sin \frac{\pi x}{L_1} \right)$

Met deze gevallen is het torsiegedrag van de meeste praktisch voorkomende belastinggevallen goed te beoordelen.

B3.3.1 Staaf op twee steunpunten met gaffelopleggingen

a. Constant moment M_t

Hier geldt voor de M_t -lijn: $k_{m1} = 1$ en: $k_{m2} = k_{m3} = 0$,

waaruit volgt: $k_{\varphi 2} = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}}$ en: $k_{\varphi 5} = k_{\varphi 6} = 0$

Uit de randvoorwaarden volgt: $k_{\varphi 1} = k_{\varphi 4} = a^2 k_{\varphi 6} / b^2 = 0$ en:

$$k_{\varphi 2} + bk_{\varphi 3} \cosh(0,5bL_2) + bk_{\varphi 4} \sinh(0,5bL_2) - ak_{\varphi 6} = 0$$

dus:

$$k_{\varphi 3} = -\frac{k_{\varphi 2} + 0 - 0}{b \cosh(0,5bL_2)} = -\frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}} \frac{1}{b \cosh(0,5bL_2)}$$

Deze constanten worden ingevuld in de vergelijking van de rotatie-lijn:

$$\varphi_{links} = k_{\varphi 2}x + k_{\varphi 3} \sinh bx \quad \text{respectievelijk:} \quad \varphi_{rechts} = k_{\varphi 2}(L-x) + k_{\varphi 3} \sinh bx \quad (\text{B3.26})$$

$$\text{Uit (B3.14), (B3.15) en (B3.22) volgt: } bL_2 = \frac{L_2}{\beta} = L_2 \sqrt{\frac{GI_{tor}}{EI_w}} = \frac{\pi}{\sqrt{C_{tw}}} \quad (\text{B3.27})$$

zodat:

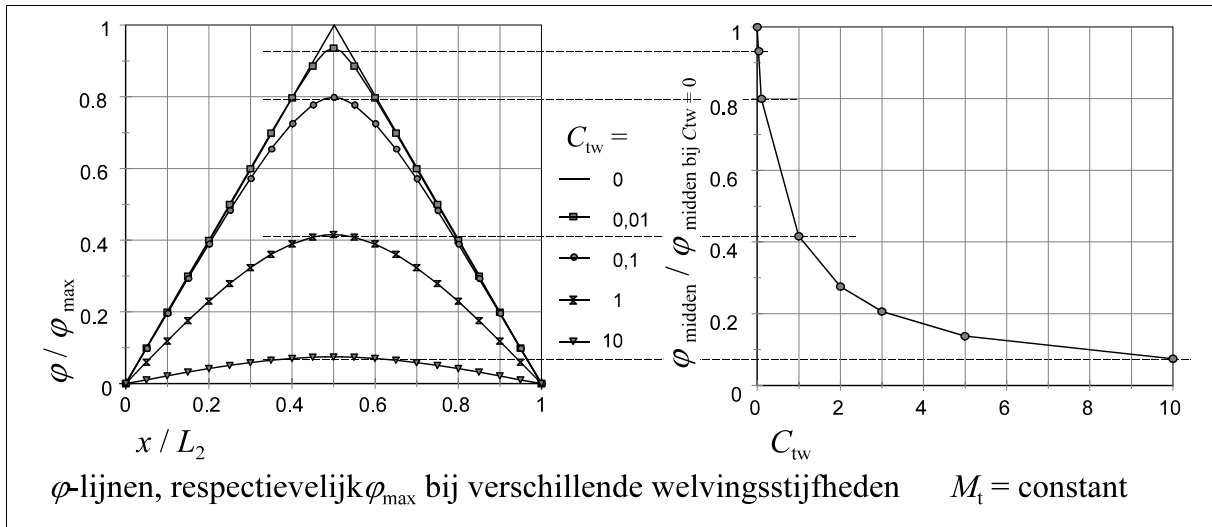
$$\varphi_{links} = \frac{\bar{M}_t L_2}{GI_{tor}} \left(\frac{x}{L_2} - \frac{\sinh \frac{\pi x}{\sqrt{C_{tw}} L_2}}{\frac{\pi}{\sqrt{C_{tw}}} \cosh \frac{\pi}{2\sqrt{C_{tw}}}} \right) \quad (\text{B3.28})$$

Voor φ_{rechts} geldt dezelfde formule met (L_2-x) in plaats van x .

Voor enkele waarden van C_{tw} is het verloop van de rotatie φ getekend in figuur B3.4-links. Figuur B3.4-rechts toont de maximale rotatie $\bar{\varphi}$ in het midden van de staaf.

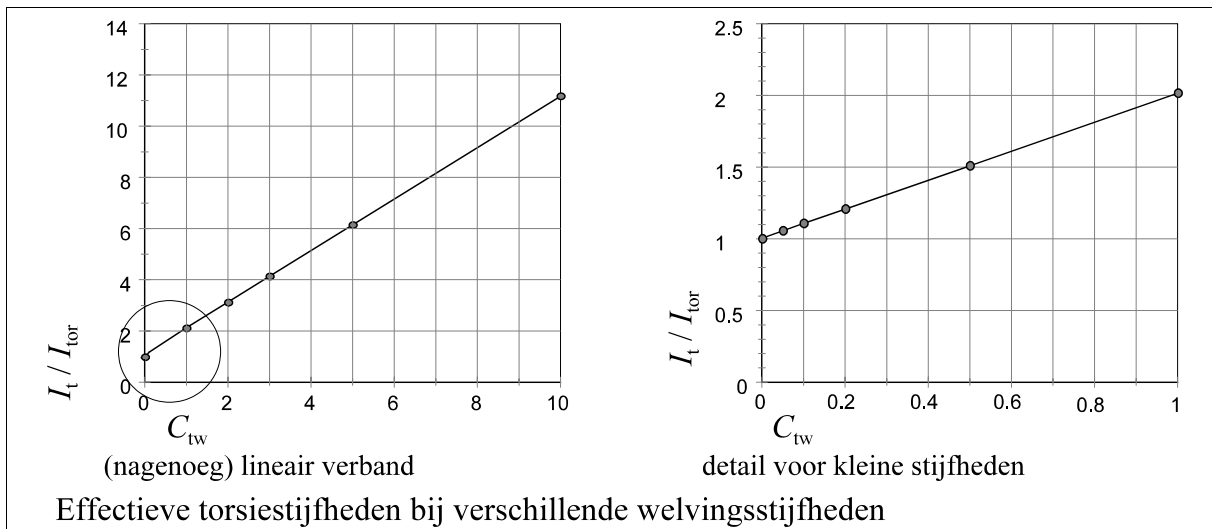
Te zien is dat zonder enige welvingsstijfheid het rotatieverloop nagenoeg evenredig is met de afstand tot de steunpunten, met een discontinuïteit in het midden van de staaf, waar het torsiemoment wisselt van teken.

Bij toenemende welvingsstijfheid gaan de rotaties in de linker- en de rechter staafhelft gelijkmatiger in elkaar over en treedt er een aanzienlijke vermindering op van de rotatie.



figuur B3.4

Om de invloed van de welvingsstijfheid te beoordelen worden nu de oppervlakken van de rotatie-lijn vergeleken. Het blijkt dat de reciproque waarden van de rotatie, en daarmee eveneens de in rekening te brengen effectieve torsieweerstand, nagenoeg lineair toeneemt met de welvingsfactor C_{tw} , zoals is te zien in figuur B3.5.



figuur B3.5

Uit de grafieken van figuur B3.5 is af te leiden dat de relaties tussen rotatie, torsieweerstand en welvingsweerstand zeer goed zijn te benaderen met:

$$\frac{\bar{\varphi}_{\text{bij } C_{tw}=0}}{\bar{\varphi}} = \frac{I_t}{I_{tor}} = 1 + C_{tw} \tag{B3.29}$$

Voor een constant moment kan dus als effectieve torsiestijfheid in rekening worden gebracht:

$$GI_t = GI_{tor} (1 + C_{tw}) \quad (\text{B3.30})$$

waarna, als relatie tussen torsie en torsiemoment eenvoudig kan worden ingevuld:

$$M_t = GI_t \varphi' \quad \text{zie (B3.03)}$$

b. Cosinusvormige M_t -lijn

Bij een (nagenoeg) cosinusvormige M_t -lijn is de rotatie-lijn φ sinusvormig en zijn de torsie-lijn φ' en de lijn van verhinderde welving φ''' beiden cosinusvormig. Alle hyperbolische termen zijn hier 0 (nul), zodat geldt:

$$M_t = GI_{tor} \varphi' - EI_w \varphi''' = GI_{tor} \varphi' \left(1 - \frac{EI_w}{GI_{tor}} \frac{\varphi'''}{\varphi'} \right) = GI_{tor} \varphi' \left(1 + \beta^2 \frac{\pi^2}{L_2^2} \right) \quad (\text{B3.31})$$

De eerder afgeleide formules kunnen dus zonder verdere aanpassingen gebruikt worden, waarbij voor het effectieve torsietraagheidsmoment in rekening kan worden gebracht:

$$I_t = I_{tor} \left(1 + \beta^2 \frac{\pi^2}{L_2^2} \right) = I_{tor} (1 + C_{tw}) \quad (\text{B3.32})$$

In Bijlage B3.1 is reeds aangegeven welke consequenties dit heeft voor de torsiestijfheid voor enkele doorsneden in hout en staal in relatie tot de overspanningen.

c. Combinatie van een cosinusvormige en een constante M_t -lijn

De torsiemomenten-lijnen die kunnen optreden zijn weergegeven in de figuren 5.16a en b. Bij belastingen met of zonder excentriciteit kunnen dezelfde formule, ontleend aan (B3.30) en/of (B3.32) worden toegepast. Voor een staaf op twee steunpunten met gaffelopleggingen is dus de in rekening te brengen effectieve torsiestijfheid:

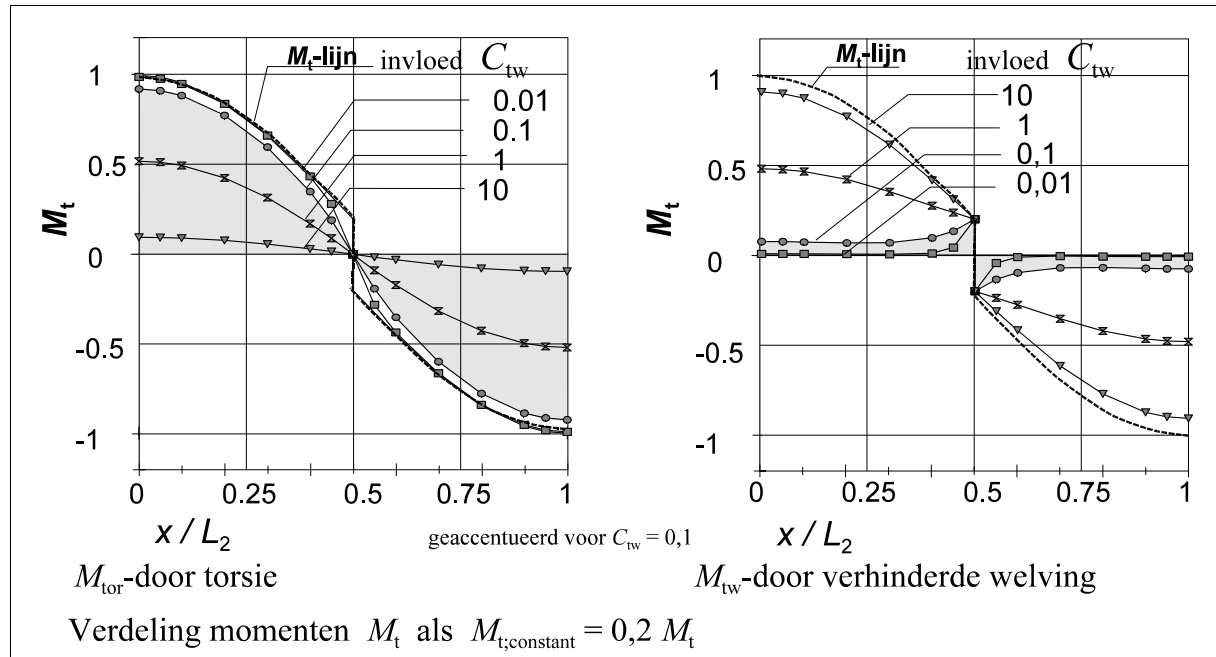
$$GI_t = GI_{tor} (1 + C_{tw}) \quad \text{zie (B3.30)}$$

Overal in de staaf wordt het torsiemoment opgenomen door twee componenten die met (B3.14a en b5), (B3.15), (B3.21) en (B3.30) zijn af te leiden uit:

$$M_t = M_{tor} + M_{tw} = GI_{tor} \varphi' - EI_w \varphi''' = M_{tor} (1 + C_{tw}) \quad (\text{B3.33})$$

In de meeste praktisch voorkomende gevallen is het constante deel van het moment ($M_{t,\text{constant}}$) niet groter dan ca. 20 % van $M_{t,\text{max}}$. Voor deze verhouding wordt de verdeling van de momenten M_t in de componenten M_{tor} en M_{tw} weergegeven in de figuren: B3.6 en B3.7:

Te zien is dat naarmate de waarde van C_{tw} toeneemt de welvingscomponent M_{tw} ook groter wordt en dat in het midden van de staaf waar de excentrische puntlast aangrijpt het constante deel van het torsiemoment geheel wordt opgenomen door de welvingscomponent.



figuur B3.6

Door de verhinderde welving ontstaan er buigende momenten in de flenzen, waarvan de grootte is te ontleen aan (B3.08), (B3.09), (B3.10) en (B3.15):

$$M_{fl} = -EI_{fl} v_{fl}'' = -EI_{fl} \frac{h}{2} \varphi'' = -\frac{EI_z}{2} \frac{h^2}{2h} \varphi'' = -\frac{EI_w}{h} \varphi'' = -GI_{\text{tor}} \frac{L^2}{\pi^2 h} C_{\text{tw}} \varphi'' \quad (\text{B3.34})$$

$$\text{Uit: } \varphi' = \frac{\bar{M}_t}{GI_t} \cos \frac{\pi x}{L} \quad \text{volgt: } \varphi'' = -\frac{\bar{M}_t}{GI_t} \frac{\pi}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (\text{B3.35a en b})$$

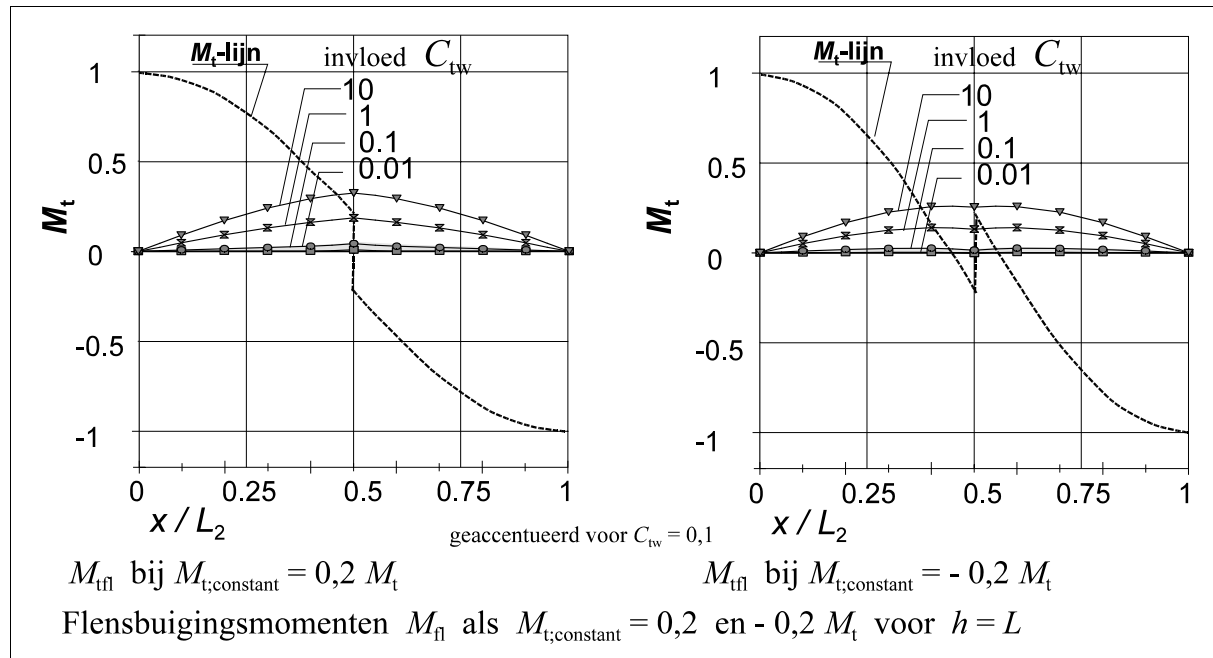
Combinatie van (B3.30), (B3.34) en (B3.35) leidt tot:

$$M_{fl} = -GI_{\text{tor}} \frac{L^2}{\pi^2 h} C_{\text{tw}} \varphi'' = GI_{\text{tor}} \frac{L^2}{\pi^2 h} C_{\text{tw}} \frac{\bar{M}_t}{GI_t} \frac{\pi}{L} \sin \frac{\pi x}{L} = \bar{M}_t \frac{L}{\pi h} \frac{C_{\text{tw}}}{(1 + C_{\text{tw}})} \sin \frac{\pi x}{L}$$

met een maximum in het midden van de staaf:

$$\bar{M}_{fl} = \bar{M}_t \frac{L}{\pi h} \frac{C_{tw}}{(1 + C_{tw})} \quad (\text{B3.37})$$

De grootte van het constante deel van het moment is hierop nauwelijks van invloed. Het juiste verloop van M_{fl} onder invloed van een constant deel van het torsiemoment is voor een waarde: $h/L = 1$ weergegeven in figuur B3.8:



figuur B3.8

Voor een vergrotingsfactor: $C_{tw} = 0,1$ respectievelijk 1 en 10 zijn de verhoudingen tussen het flensbuigingsmoment en het maximale torsiemoment:

$$\frac{\bar{M}_{fl}}{\bar{M}_t} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{0,1}{1,1} = 0,03, \text{ respectievelijk } \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = 0,16 \text{ en } \frac{1}{\pi} \cdot \frac{10}{11} = 0,29$$

zoals ook is af te leiden uit het gemiddelde van de twee grafieken van figuur B3.7.

Dit betekent dat bij slanke staven met een grote welvingsstijfheid de waarde van: $M_{fl,max}$ dus zeker groter kan worden dan $M_{t,max}$.

De hierdoor veroorzaakte buigspanningen moeten worden opgenomen door $W_{fl;z} = 0,5 W_z$ en kunnen worden gesuperponeerd op de buigspanningen ten gevolge van M_{y1} en M_{z2} .

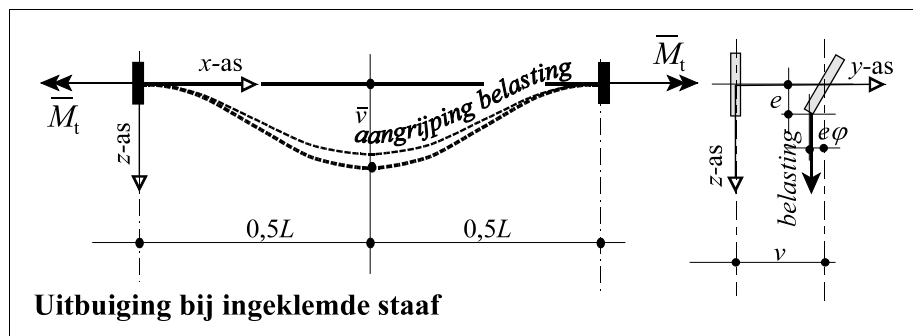
De consequenties hiervan met betrekking tot de sterkte-toets worden nagegaan in Hoofdstuk 8.

De diverse in rekening te brengen momenten zijn samengevat in het volgende overzicht:

momenten door torsie:		gevolgen:	
'zuivere' torsie	$\bar{M}_{tor} = GI_{tor} \bar{\varphi}' = \frac{\bar{M}_t}{1 + C_{tw}}$	schuifspanningen, met maximum langs de omtrek van de profieldoorsnede	(B3.37)
verhinderde welving	$\bar{M}_{tw} = -EI_w \bar{\varphi}''' = \bar{M}_t \frac{C_{tw}}{1 + C_{tw}}$	koppel van reactiekrachten in de flenzen, (geen schuifspanningen)	(B3.38)
vormen samen het totale torsiemoment			
flensbuiging	$\bar{M}_{fl} = -EI_{fl} \bar{v}_{fl}'' = \bar{M}_t \frac{L}{\pi h} \frac{C_{tw}}{1 + C_{tw}}$	buigspanningen: σ_{mz} op te nemen door: $W_{fl} = 0,5 W_z$	(B3.39)

B3.3.2 Staaf op twee steunpunten met inklemmingen

Een inklemming die welving van de doorsnede verhindert zal in de meeste gevallen praktisch tevens in staat zijn om rotatie zowel om de y-as als om de z-as te verhinderen. Zie figuur B3.9



figuur B3.9

In het volgende wordt uitgegaan van staven met inklemmingen, die alle rotaties en welvingen geheel verhinderen. Het verschil met staven met gaffelopleggingen is dat bij de inklemming geldt: $\varphi = 0$ waardoor de constanten $k_{\varphi 3}$ en $k_{\varphi 4}$ moeten worden aangepast.

a. Constant moment M_t

Hier geldt voor de M_t -lijn: $k_{m1} = 1$ en: $k_{m2} = k_{m3} = 0$,

waaruit volgt: $k_{\varphi 2} = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}}$ en: $k_{\varphi 5} = k_{\varphi 6} = 0$

Uit de randvoorwaarden volgt: $k_{\varphi 1} = -k_{\varphi 4}$ $k_{\varphi 3} = -(k_{\varphi 2} + ak_{\varphi 5}) / b = -k_{\varphi 2} / b$ en:
 $k_{\varphi 2} + bk_{\varphi 3} \cosh(0,5bL_2) + bk_{\varphi 4} \sinh(0,5bL_2) - ak_{\varphi 6} = 0$

$$\text{dus: } k_{\varphi_3} = -\frac{k_{\varphi_2}}{b} = -\frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}} \frac{1}{b}$$

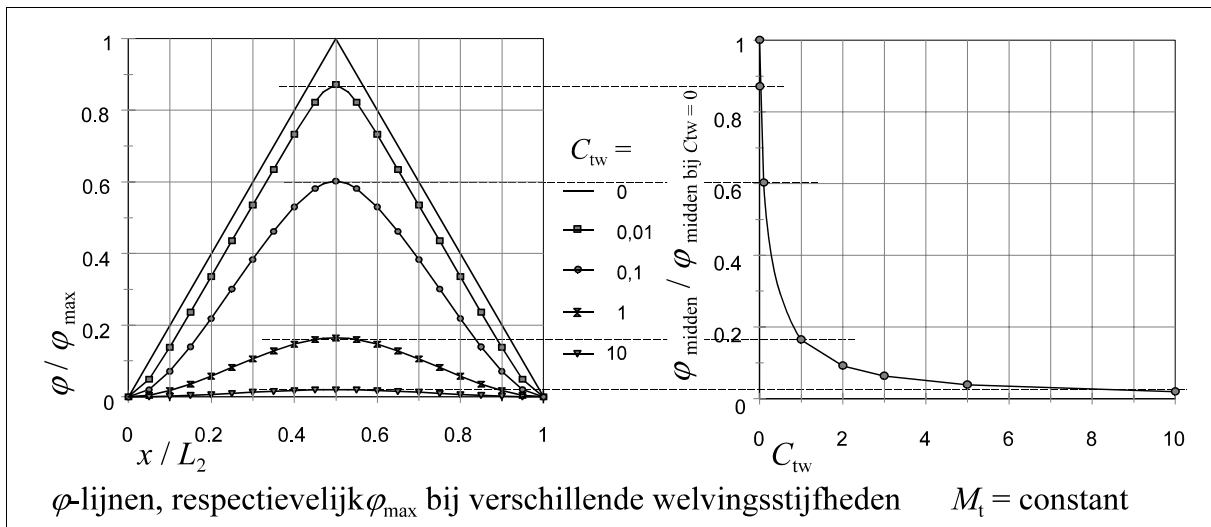
$$k_{\varphi_4} = -k_{\varphi_1} = -\frac{k_{\varphi_2} + bk_{\varphi_3} \cosh(0,5bL_2) - 0}{b \sinh(0,5bL_2)} = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}} \frac{-1 + \cosh(0,5bL_2)}{b \sinh(0,5bL_2)}$$

Deze constanten worden ingevuld in de vergelijking van de rotatie-lijn:

$$\varphi = k_{\varphi_2}x + k_{\varphi_3} \sinh bx + k_{\varphi_4} \cosh bx \quad (\text{B3.40})$$

Op dezelfde manier als bij een staaf met gaffelopleggingen zijn ook hier voor enkele waarden van C_{tw} het verloop van de rotatie φ en de maximale rotatie berekend.

De resultaten zijn weergegeven in figuur B3.10.



figuur B3.10

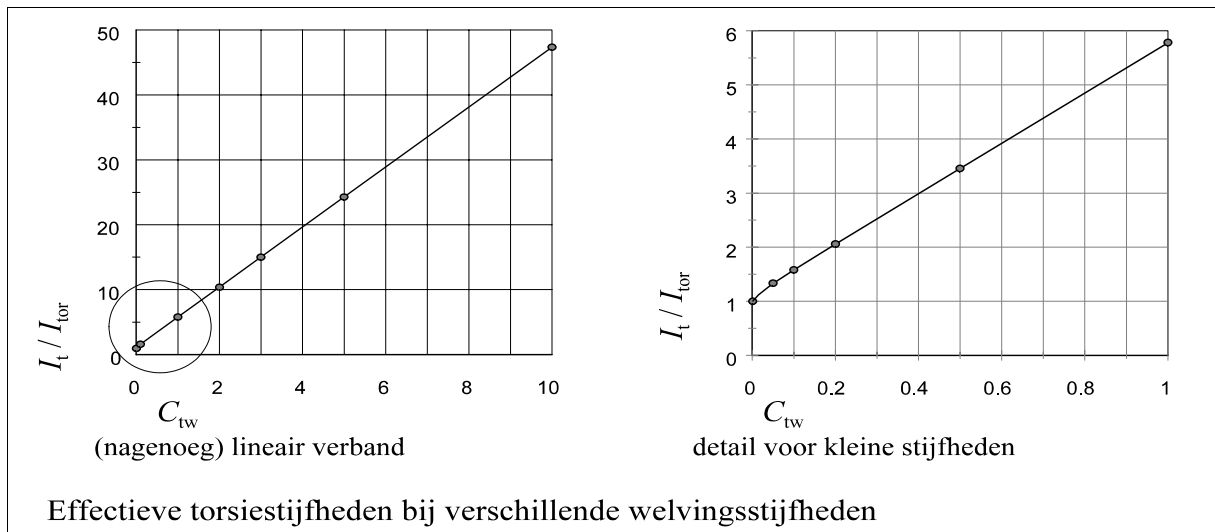
Ook hier blijken de reciproque waarden van het oppervlak van de rotatie-lijn, en daarmee eveneens de in rekening te brengen effectieve torsieweerstand, nagenoeg lineair toe te nemen met de welvingsfactor C_{tw} , zoals is te zien in figuur B3.11.

De relaties tussen rotatie, torsieweerstand en welvingsweerstand zijn goed te benaderen met:

$$\frac{\bar{\varphi}_{\text{bij } C_{tw}=0}}{\bar{\varphi}} = \frac{I_t}{I_{tor}} = 1 + 4,8C_{tw} \quad (\text{B3.41})$$

Voor een constant moment kan dus als effectieve torsiestijfheid in rekening worden gebracht:

$$GI_t = GI_{tor} (1 + 4,8C_{tw}) \quad (\text{B3.42})$$



figuur B3.11

b. Cosinusvormige M_t -lijn

De momenten-lijn is:
$$M_t = \bar{M}_t \cos \frac{\pi x}{L_2} = GI_{tor} \frac{\pi}{L_2} \left(1 + \frac{\pi^2}{b^2 L_2^2} \right) k_{\varphi 5} \cos \frac{\pi x}{L_2} \quad (\text{B3.43})$$

waarin dus:
$$k_{m1} = k_{m3} = 0, \quad k_{m2} = 1, \quad a = \frac{\pi}{L_2} \quad \text{en} \quad b = \frac{1}{\beta}$$

Uit (B3.24a,b,c) volgt: $k_{\varphi 2} = k_{\varphi 6} = 0$ en:
$$k_{\varphi 5} = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}} \frac{k_{m2}}{a \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)} = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}} \frac{L_2}{\pi \left(1 + \frac{\pi^2}{b^2 L_2^2} \right)}$$

Van toepassing zijn de randvoorwaarden (B3.25a,b en d):

$$k_{\varphi 1} = - \{ k_{\varphi 4} + 0 \} \quad k_{\varphi 3} = - \{ 0 + a k_{\varphi 5} \} / b \quad b k_{\varphi 4} \sinh(0,5bL_2) = - \{ 0 + b k_{\varphi 3} \cosh(0,5bL_2) - 0 \}$$

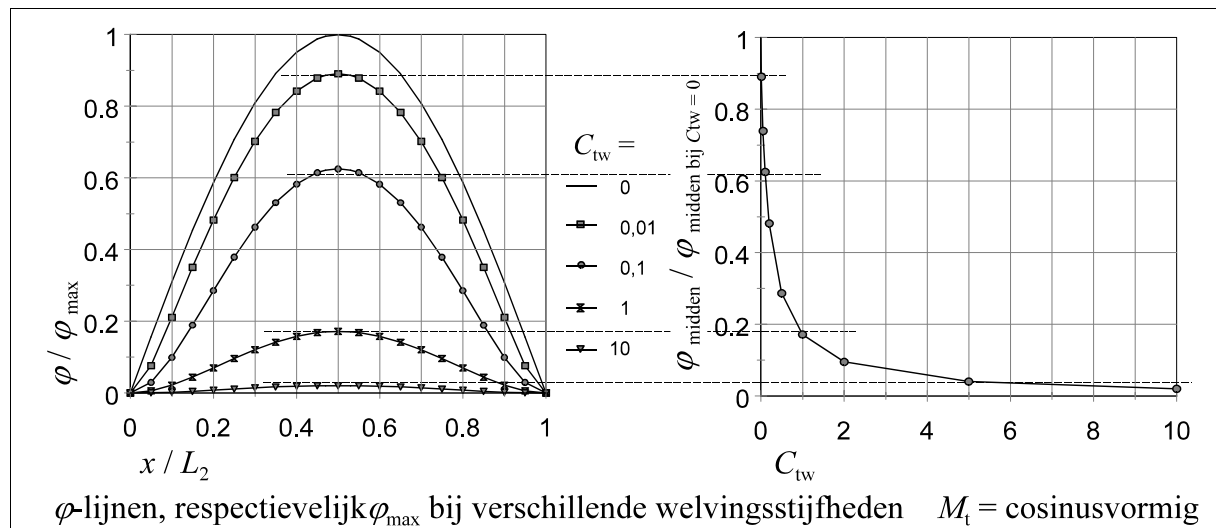
dus:
$$k_{\varphi 3} = - \frac{a k_{\varphi 5}}{b} = - \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}} \frac{\pi}{L_2} \frac{1}{b} \frac{L_2}{\pi \left(1 + \frac{\pi^2}{b^2 L_2^2} \right)} = - \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}} \frac{1}{b \left(1 + \frac{\pi^2}{b^2 L_2^2} \right)}$$

$$k_{\varphi 4} = -k_{\varphi 1} = - \frac{k_{\varphi 3} \cosh(0,5bL_2)}{\sinh(0,5bL_2)} = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}} \frac{1}{b \left(1 + \frac{\pi^2}{b^2 L_2^2} \right) \tanh(0,5bL_2)}$$

Deze constanten worden ingevuld in de vergelijking van de rotatie-lijn:

$$\varphi = k_{\varphi 1} + k_{\varphi 3} \sinh bx + k_{\varphi 4} \cosh bx + k_{\varphi 5} \cos \frac{\pi x}{L_2} \quad (\text{B3.44})$$

Voor enkele waarden van C_{tw} zijn het verloop van de rotatie φ en de maximale rotatie $\bar{\varphi}$ berekend. De resultaten zijn weergegeven in figuur B3.12.



figuur B3.12

Duidelijk is te zien dat door de inklemmingen een aanzienlijke vermindering van de rotatie ontstaat ten opzichte van een staaf met gaffelopleggingen. Het verloop van de rotatie-lijnen blijft echter (nagenoeg) sinusvormig.

De reciproque waarden van het oppervlak van de rotatie-lijnen, en daarmee eveneens de in rekening te brengen effectieve torsieweerstand, nemen weer nagenoeg lineair toe met de welvingsfactor C_{tw} , zoals is te zien in figuur B3.13.

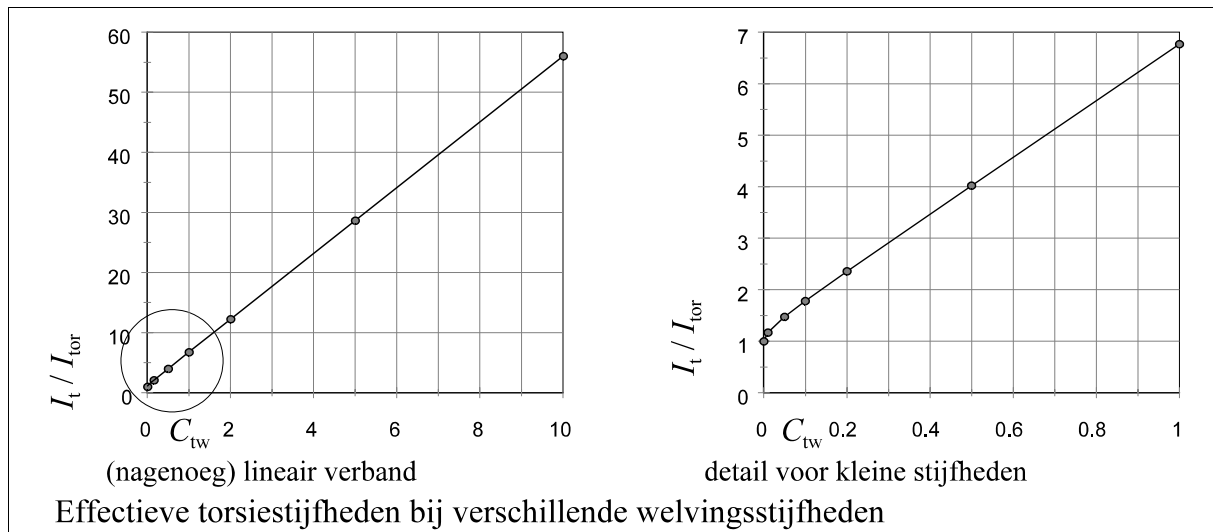
De relaties tussen rotatie, torsieweerstand en welvingsweerstand zijn goed te benaderen met:

$$\frac{\bar{\varphi}_{\text{bij } C_{tw}=0}}{\bar{\varphi}} = \frac{I_t}{I_{tor}} = 1 + k_4 C_{tw} \quad (\text{B3.45})$$

waarin: $k_4 = 5,5$

Bij een cosinusvormige M_t -lijn kan dus als effectieve torsiestijfheid worden gerekend met:

$$GI_t = GI_{tor} (1 + k_4 C_{tw}) = GI_{tor} (1 + 5,5 C_{tw}) \quad (\text{B3.46})$$



figuur B3.13

c. Combinatie van een cosinusvormige en een constante M_t -lijn

Bij staven met excentrisch aangrijpende belasting treedt er altijd een combinatie van invloeden op. In de meeste praktische gevallen zal de excentriciteit beperkt blijven tot minder dan een tiende van de staaflengte en ontstaat er torsiemomenten-lijnen zoals zijn weergegeven in de figuren 5.14a en b respectievelijk 5.33.a en b.

De in rekening te brengen effectieve torsiestijfheid is dan:

$$I_t = I_{tor} \left\{ k_{M\cosinus} (1 + 5,5C_{tw}) + k_{Mconstant} (1 + 4,8C_{tw}) \right\} \quad (B3.47)$$

Hierin is: $k_{M\cosinus}$ = het cosinusvormige deel van het maximale torsiemoment
 $k_{Mconstant}$ = het constante deel van het maximale torsiemoment

Het constante deel van het totale torsiemoment zal praktisch nooit groter zijn dan 20% waaruit volgt dat I_t kan worden geschreven als:

voor een positief constant deel (door een positieve excentriciteit): $I_t = I_{tor} (1 + 5,36C_{tw})$

respectievelijk voor een negatieve excentriciteit: $I_t = I_{tor} (1 + 5,64C_{tw})$

Deze kleine verschillen lonen in de praktijk niet of nauwelijks de moeite om ze in rekening te brengen, zodat voor een ingeklemde staaf op twee steunpunten kan worden aangehouden:

$$GI_t = GI_{tor} (1 + k_4 C_{tw}) = GI_{tor} (1 + 5,5C_{tw}) \quad (B3.48)$$

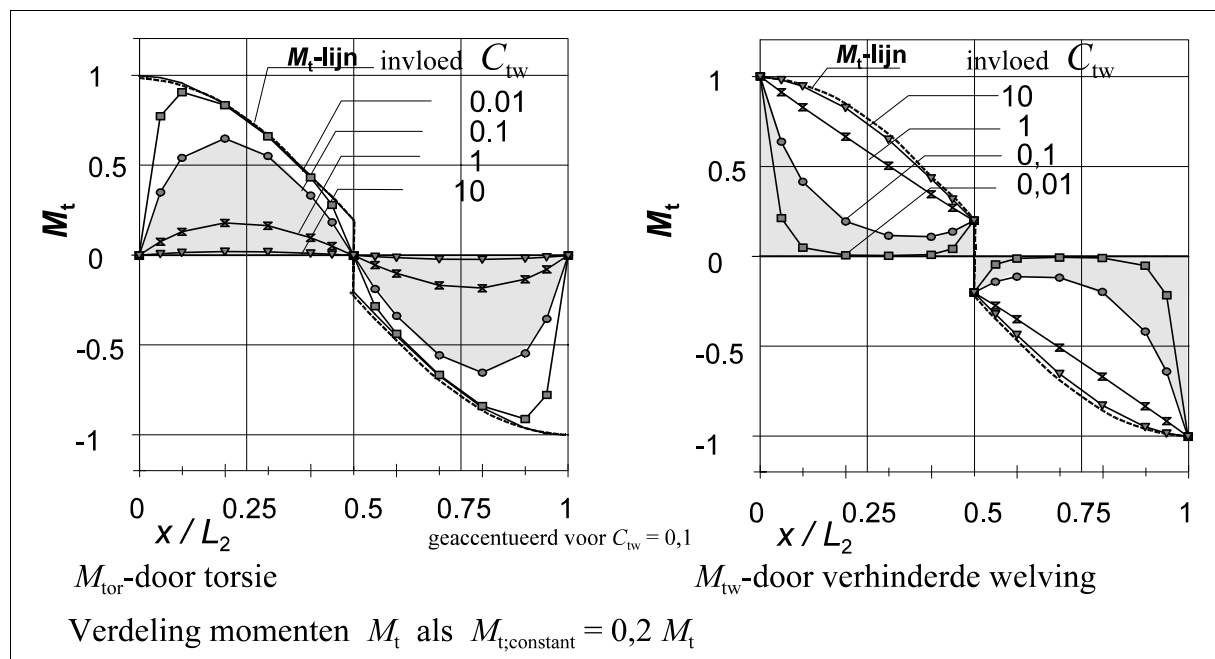
Bij welving-verhinderende inklemmingen is de 'toeslag' op de torsiestijfheid voor hetzelfde profiel dus ruim vijf maal zo groot als bij gaffelopleggingen.

N.B. Dit is goed vergelijkbaar met de doorbuiging van ingeklemde staven ten opzichte van vrij opgelegde staven, waar de maximale verplaatsingen in het staafmidden zijn:

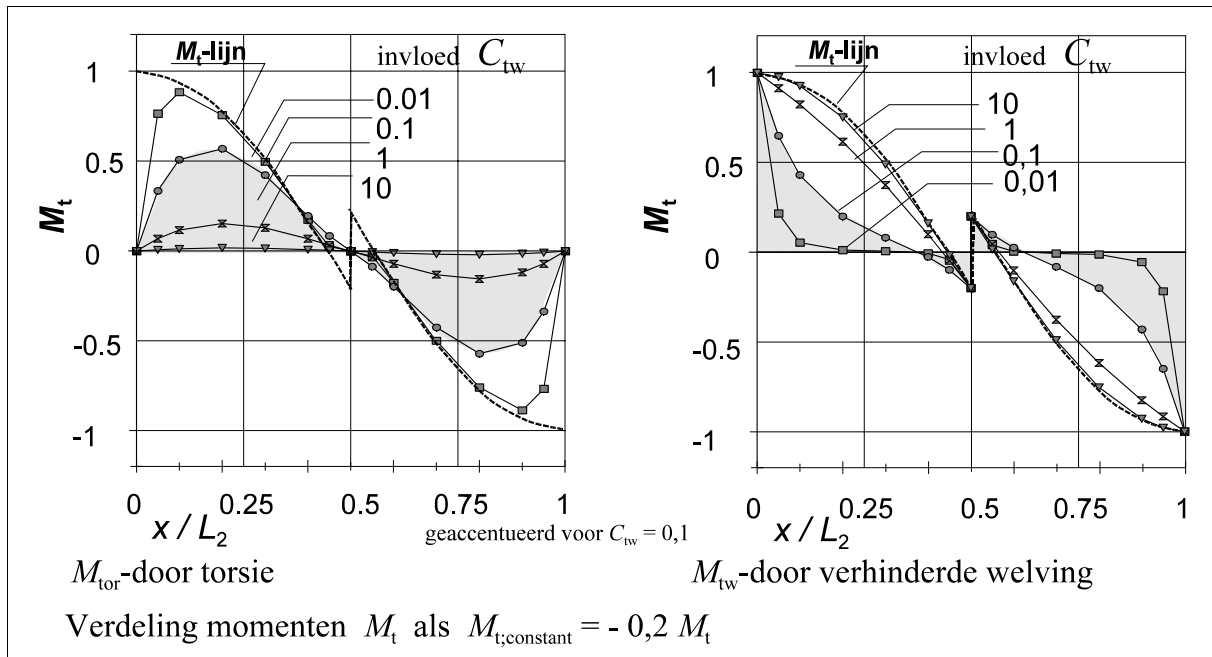
$$\bar{w} = \frac{1}{348} \frac{qL^4}{EI_y} \quad \text{ten opzichte van:} \quad \bar{w} = \frac{5}{348} \frac{qL^4}{EI_y} \quad (\text{B3.49})$$

Ter informatie wordt voor een staaf met inklemmingen met een klein constant deel van het torsiemoment ($M_{t;\text{constant}} = 0,2 M_{t;\text{max}}$, respectievelijk $-0,2 M_{t;\text{max}}$) de verdeling in de twee samenstellende componenten M_{t1} en M_{t2} weergegeven in de figuren: B3.14 en B3.15:

Vergelijking met een staaf met gaffelopleggingen (zie figuren B3.6 respectievelijk B3.7) toont dat nu bij de steunpunten het gehele torsiemoment en dat in het midden van de staaf het constante deel van het torsiemoment wordt opgenomen door de welvingscomponent M_{tw} .

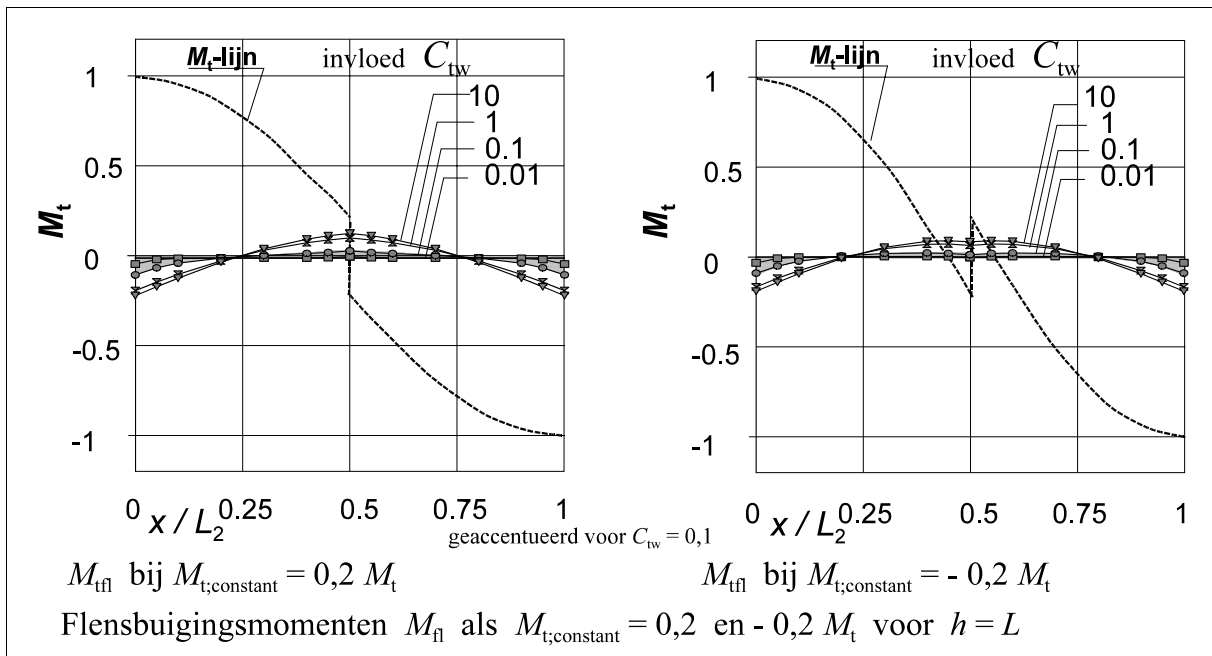


figuur B3.14



figuur B3.15

Het verloop van M_{fl} onder invloed van een constant deel van plus en min 20% van het torsiemoment is voor een waarde: $h/L = 1$ weergegeven in figuur B3.16:



figuur B3.16

Te zien is dat de M_{fl} -lijnen sterke gelijkenis vertonen met de (bekende) buigend-momentlijnen bij tweezijdig ingeklemde staven met een gelijkmatig verdeelde belasting.

De som van de flensbuigingsmomenten is voor het hier gestelde doel (bepaling van de invloed van de welvingsstijfheid op de kipstabiliteit) voldoende nauwkeurig te benaderen met:

$$\sum \bar{M}_{fl} = \bar{M}_t \frac{L}{\pi h} \frac{5,5C_{tw}}{(1 + 5,5C_{tw})} \quad (\text{B3.50})$$

waarvan: $\left[\begin{array}{ll} \text{bij de inklemming:} & 2/3 \text{ deel (negatief)} \\ \text{in het midden van de staaf:} & 1/3 \text{ deel (positief)} \end{array} \right. \quad (\text{B3.51})$

De grootte van het constante deel van het torsiemoment heeft hierop nauwelijks invloed. De buigspanningen in de flenzen kunnen worden gesuperponeerd op de buigspanningen ten gevolge van: M_{y1} en M_{z2} . Hun invloed op de sterkteoets wordt nagegaan in hoofdstuk 8.

De diverse in rekening te brengen momenten zijn samengevat in het volgende overzicht:

momenten door torsie:		gevolgen:
totale torsie-moment	'zuivere' torsie $\bar{M}_{tor} = GI_{tor} \bar{\varphi}' = \frac{\bar{M}_t}{1 + 5,5C_{tw}}$	schuifspanningen, met maximum langs de omtrek van de profieldoorsnede (B3.52)
	verhinderde welving $\bar{M}_{tw} = -EI_w \bar{\varphi}''' = \bar{M}_t \frac{5,5C_{tw}}{1 + 5,5C_{tw}}$	koppel van reactiekrachten in de flenzen, (geen schuifspanningen) (B3.53)
flens-buiging	$\bar{M}_{fl} = -EI_{fl} \bar{v}_{fl}'' = \frac{\bar{M}_t L}{\pi h} \cdot \frac{5,5C_{tw}}{1 + 5,5C_{tw}}$	buigspanningen: σ_{mflz} op te nemen door: $W_{fl} = 0,5 W_z$.
	waarvan: - 2/3 bij de inklemming +1/3 in het staafmidden (B3.54)	

B3.3.3 Uitkraging met gaffeloplegging

De staaf lengte van een uitkraging wordt (ter onderscheiding van staven op twee steunpunten) aangeduid met L_1 .

Vanwege de noodzakelijke evenwichtsvoorwaarden en de stabiliteit in de 'zwakke' richting, is het constructief noodzakelijk dat de oplegging een reactiemoment M_z op moet kunnen nemen. De daartoe nodige inklemming zal dus ook in staat zijn om de welving van de doorsnede te verhinderen. Een uitkraging met uitsluitend een gaffeloplegging is daardoor alleen theoretisch interessant, maar heeft geen praktische betekenis.

Omdat het uiteinde zich vrij kan bewegen worden aldaar de rotatie en de welving niet verhinderd. Als ook bij de oplegging de doorsnede vrij kan welven wordt de vergroting van de welvingsstijfheid nauwelijks benut.

a. Constant moment M_t

Hier geldt voor de M_t -lijn: $k_{m1} = 1$ en: $k_{m2} = k_{m3} = 0$,

waaruit volgt: $k_{\varphi 2} = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}}$ en: $k_{\varphi 5} = k_{\varphi 6} = 0$

Uit de randvoorwaarden volgt: $k_{\varphi 1} = k_{\varphi 4} = a^2 k_{\varphi 6} / b^2 = 0$ en:

$$bk_{\varphi 3} \sinh bL_1 + bk_{\varphi 4} \cosh bL_1 - ak_{\varphi 6} = 0 \text{ dus: } k_{\varphi 3} = 0$$

De enig overgebleven constante is nu: $k_{\varphi 2}$, zodat de vergelijking van de rotatie-lijn wordt:

$$\varphi = k_{\varphi 2} x = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}} x \quad (\text{B3.55})$$

Over het gehele staafverloop zijn alle opeenvolgende waarden van φ constant, zodat de waarde van φ'' overal nul is en de welvingsstijfheid van de staaf geen enkele invloed heeft.

b. Sinusvormige M_t -lijn

De (holle) torsiemomenten-lijn van de uitkraging is:

$$M_t = \bar{M}_t \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2L_1} \right) = GI_{tor} \left\{ k_{\varphi 2} - \frac{\pi}{2L_1} \left(1 + \frac{\pi^2}{b^2 L_1^2} \right) k_{\varphi 6} \sin \frac{\pi x}{2L_1} \right\} \quad (\text{B3.56})$$

waarin: $k_{m1} = -k_{m3} = 1$, $k_{m2} = 0$, $k_{\varphi 5} = 0$, $k_{\varphi 2} = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}}$, $k_{\varphi 6} = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}} \frac{1}{a \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)}$,

$$a = \frac{\pi}{2L_1}, \quad b = \frac{1}{\beta} \quad \text{en} \quad C_{tw} = \frac{\pi^2 EI_t}{L_1^2 GI_{tor}} = \frac{\pi^2 \beta^2}{L_1^2} \quad \text{dus: } bL_1 = \frac{\pi}{\sqrt{C_{tw}}}$$

Hieruit volgt: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\pi^2}{4L_1^2} \frac{L_1^2}{\pi^2} C_{tw} = \frac{C_{tw}}{4}$ en ook: $k_{\varphi 6} = \frac{\bar{M}_t L_1}{GI_{tor}} \frac{2}{\pi \left(1 + \frac{C_{tw}}{4} \right)}$

Van toepassing zijn de randvoorwaarden (B3.25a,c en e):

$$k_{\varphi 1} = -(k_{\varphi 4} + k_{\varphi 6}), \quad k_{\varphi 4} = a^2 k_{\varphi 6} / b^2 \quad \text{en} \quad b^2 k_{\varphi 3} \sinh bL_1 + b^2 k_{\varphi 4} \cosh bL_1 - 0 = 0$$

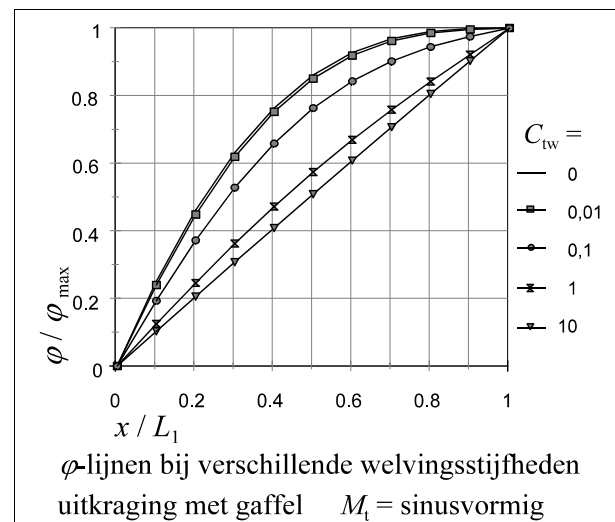
$$\text{dus: } k_{\varphi 3} = -\frac{k_{\varphi 4}}{\tanh bL_1} = -\frac{a^2 k_{\varphi 6}}{b^2 \tanh bL_1}$$

De constanten $k_{\varphi 1}$, $k_{\varphi 3}$ en $k_{\varphi 4}$ zijn dus uit te drukken in $k_{\varphi 6}$.

Alle constanten worden ingevuld in de vergelijking van de rotatie-lijn:

$$\varphi = k_{\varphi 1} + k_{\varphi 3} \sinh bx + k_{\varphi 4} \cosh bx + k_{\varphi 6} \sin \frac{\pi x}{2L_1} \quad (\text{B3.57})$$

Voor enkele waarden van C_{tw} is het verloop van de rotatie φ berekend. De resultaten zijn weergegeven in figuur B3.17.



figuur B3.17

Bij de oplegging is de helling van de φ -lijn (overeenkomend met de torsie φ) maximaal, wat verwacht mag worden omdat daar het torsiemomen M_t maximaal is.

Bij toenemende welvingsstijfheid blijft de staaf weliswaar iets rechter, maar deze stijfheid heeft geen enkele invloed op de rotatie van het staafeind.

Het is daarom veilig om bij uitkragingen met een gaffeloplegging (voor zover ze ooit worden toegepast) geen vergroting van de stijfheid door verhinderde welving in rekening te brengen.

B3.3.4 Uitkraging met inklemming

a. Constant moment M_t

Hier geldt voor de M_t -lijn: $k_{m1} = 1$ en: $k_{m2} = k_{m3} = 0$,

waaruit volgt: $k_{\varphi 2} = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}}$ en: $k_{\varphi 5} = k_{\varphi 6} = 0$

Van toepassing zijn de randvoorwaarden (B3.25a,b en e):

$$k_{\varphi 1} = -(k_{\varphi 4} + 0), \quad k_{\varphi 3} = -(k_{\varphi 2} + 0)/b \quad \text{en} \quad b^2 k_{\varphi 3} \sinh bL_1 + b^2 k_{\varphi 4} \cosh bL_1 - 0 = 0$$

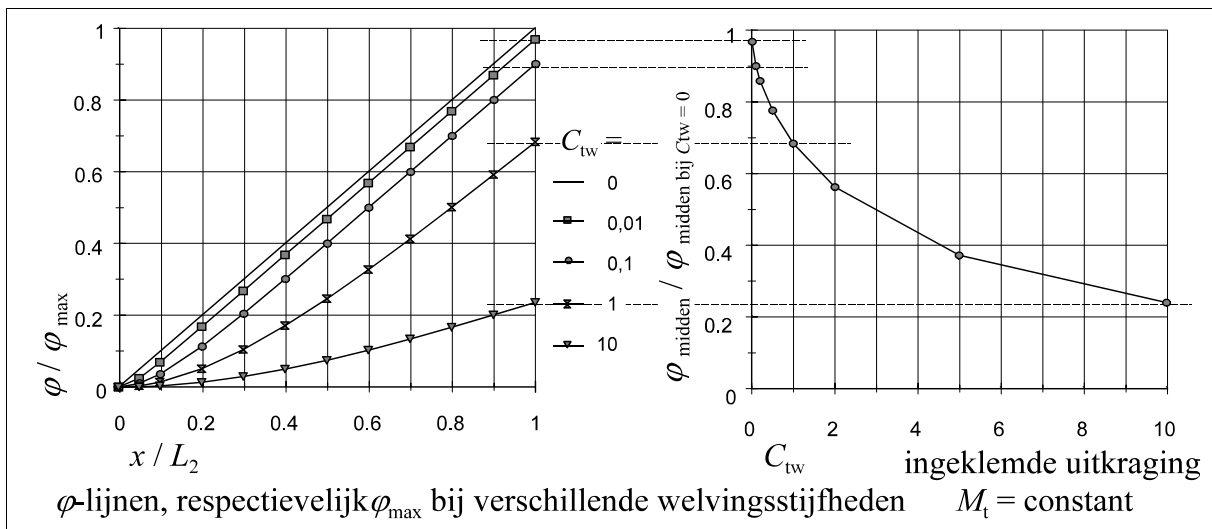
$$\text{dus: } k_{\varphi 3} = -\frac{k_{\varphi 2} + 0}{b} = -\frac{\bar{M}_t L_1}{GI_{tor}} \frac{1}{bL_1} \quad k_{\varphi 4} = -k_{\varphi 3} \tanh bL_1 = \frac{\bar{M}_t L_1}{GI_{tor}} \frac{\tanh bL_1}{bL_1}$$

De constanten $k_{\varphi 1}$, $k_{\varphi 2}$, $k_{\varphi 3}$ en $k_{\varphi 4}$ worden ingevuld in de vergelijking van de rotatie-lijn:

$$\varphi = k_{\varphi 1} + k_{\varphi 2}x + k_{\varphi 3} \sinh bx + k_{\varphi 4} \cosh bx \quad (\text{B3.58})$$

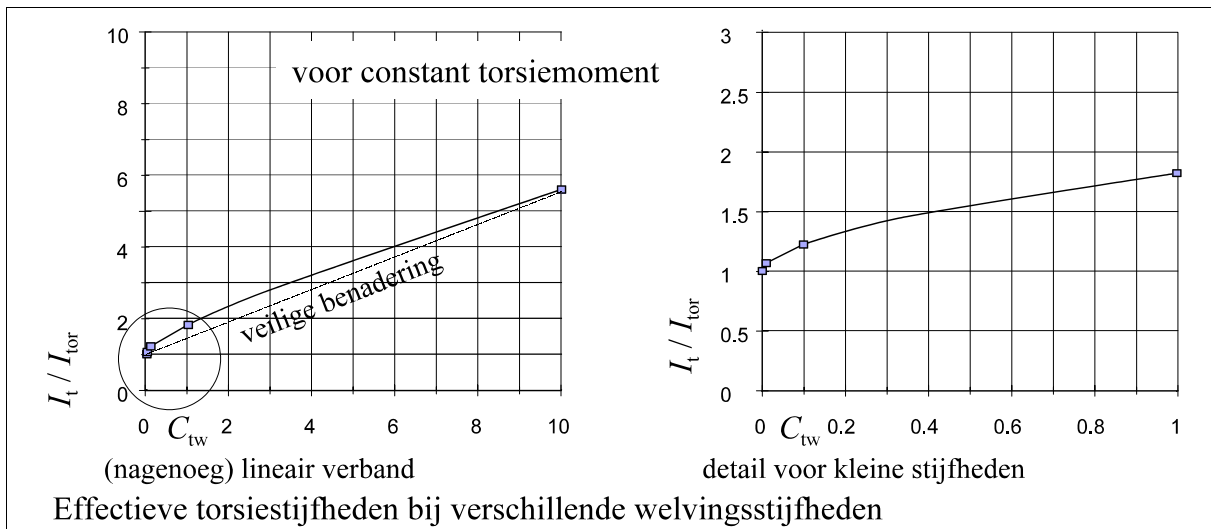
De berekeningen zijn gemaakt op dezelfde manier als bij staven op twee steunpunten.

De resultaten zijn af te lezen in de grafieken van figuur B3.18.



figuur B3.18

De inklemming en de welvingsstijfheid leiden samen tot duidelijke vermindering van de rotatie. De reciproque waarden van het oppervlak van de rotatie-lijnen, en daarmee eveneens de in rekening te brengen effectieve torsieweerstand, nemen weer nagenoeg lineair toe met de welvingsfactor C_{tw} , zoals is te zien in figuur B3.19.



figuur B3.19

Het verband tussen rotatie, torsieweerstand en welvingsweerstand verloopt hier iets minder mooi lineair dan bij staven op twee steunpunten, maar is toch veilig te benaderen met:

$$\frac{\bar{\varphi}_{\text{bij } C_{tw}=0}}{\bar{\varphi}} = \frac{I_t}{I_{tor}} = 1 + 0,45C_{tw} \quad (\text{B3.59})$$

Voor een constant moment kan dus als effectieve torsiestijfheid in rekening worden gebracht:

$$GI_t = GI_{tor} (1 + 0,45C_{tw}) \quad (\text{B3.60})$$

b. Sinusvormige M_t -lijn

De (holle) torsiemomenten-lijn is dezelfde als in B3.3.3:

$$M_t = \bar{M}_t \left(1 - \sin \frac{\pi x}{L_1} \right) = GI_{tor} \left\{ k_{\varphi 2} - \frac{\pi}{L_2} \left(1 + \frac{\pi^2}{b^2 L_1^2} \right) k_{\varphi 6} \sin \frac{\pi x}{2L_1} \right\} \quad (\text{B3.61})$$

$$\text{waarin: } k_{m1} = -k_{m2} = 1, \quad k_{m3} = 0, \quad k_{\varphi 5} = 0, \quad k_{\varphi 2} = \frac{\bar{M}_t}{GI_{tor}}, \quad k_{\varphi 6} = \frac{\bar{M}_t L_1}{GI_{tor}} \frac{2}{\pi \left(1 + \frac{C_{tw}}{4} \right)}$$

Van toepassing zijn de randvoorwaarden (B3.25a,b en e):

$$k_{\varphi 1} = -(k_{\varphi 4} + k_{\varphi 6}), \quad k_{\varphi 3} = -(k_{\varphi 2} + 0)/b \quad \text{en} \quad b^2 k_{\varphi 3} \sinh bL_1 + b^2 k_{\varphi 4} \cosh bL_1 - 0 = 0$$

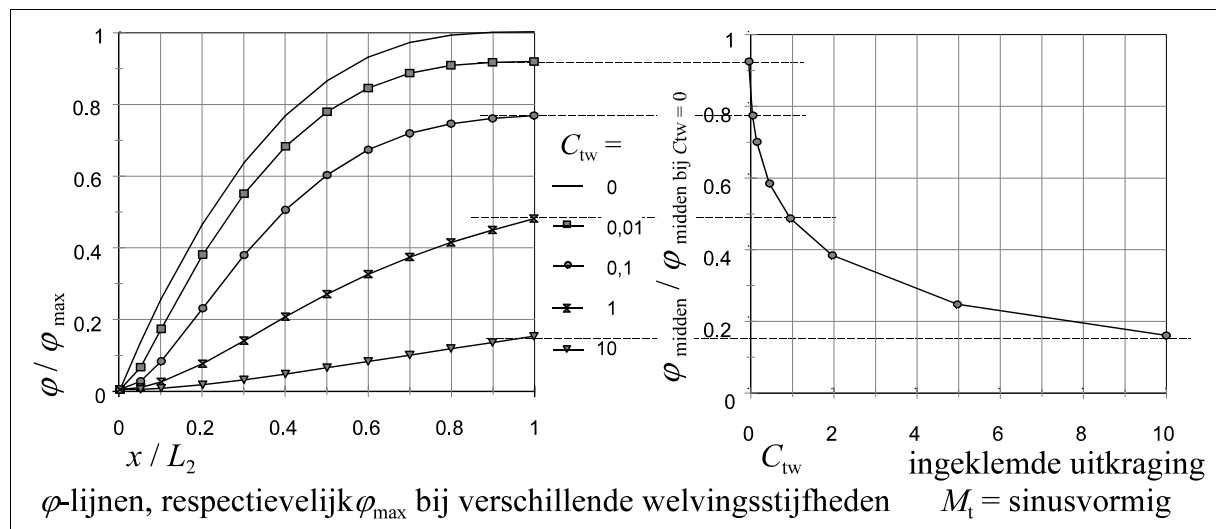
$$\text{dus: } k_{\varphi 3} = -\frac{k_{\varphi 2} + 0}{b} = -\frac{\bar{M}_t L_1}{GI_{tor}} \frac{1}{bL_1} \quad \text{en} \quad k_{\varphi 4} = -k_{\varphi 3} \tanh bL_1 = \frac{\bar{M}_t L_1}{GI_{tor}} \frac{\tanh bL_1}{bL_1}$$

De constanten $k_{\varphi 1}$, $k_{\varphi 3}$ en $k_{\varphi 4}$ zijn dus uit te drukken in $k_{\varphi 6}$.

Alle constanten worden ingevuld in de vergelijking van de rotatie-lijn:

$$\varphi = k_{\varphi 1} + k_{\varphi 3} \sinh bx + k_{\varphi 4} \cosh bx + k_{\varphi 6} \cos \frac{\pi x}{2L_1} \quad (\text{B3.62})$$

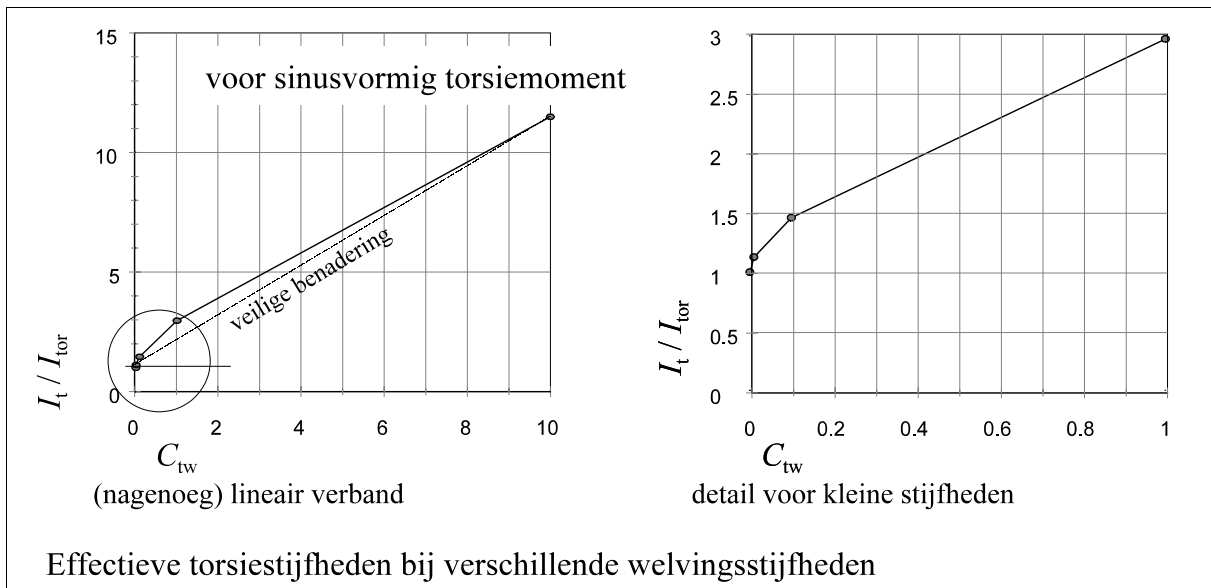
Voor enkele waarden van C_{tw} is het verloop van de rotatie φ berekend. De resultaten zijn weergegeven in figuur B3.20.



figuur B3.20

De reciproque waarden van het oppervlak van de rotatie-lijnen, en daarmee eveneens de in rekening te brengen effectieve torsieweerstand, nemen weer nagenoeg lineair toe met de welvingsfactor C_{tw} , zoals is te zien in figuur B3.21.

Hierbij valt op dat de verhoudingen tussen rotatie en stijfheid een vergelijkbaar verloop hebben als bij een staaf op twee steunpunten, maar dat de invloed van welvingsstijfheid duidelijk minder is. Dit is ook te verwachten omdat bij een uitkraging bij slechts één staafeind de welving van de doorsnede kan worden verhinderd.



figuur B3.21

Het verband tussen rotatie, torsieweerstand en welvingsweerstand verloopt hier evenals bij constant moment niet geheel lineair maar is toch veilig te benaderen met:

$$\frac{\bar{\varphi}_{\text{bij } C_{tw}=0}}{\bar{\varphi}} = \frac{I_t}{I_{tor}} = 1 + 1,05C_{tw} \quad (\text{B3.63})$$

Voor een (hol) sinusvormig momentenverloop kan dus als effectieve torsiestijfheid in rekening worden gebracht:

$$GI_t = GI_{tor} (1 + 1,05C_{tw}) \quad (\text{B3.64})$$

c. Combinatie van een sinusvormige en een constante M -lijn

Bij staven met excentrisch aangrijpende belasting treedt er altijd een combinatie van invloeden op. Meestal zal de excentriciteit beperkt blijven tot minder dan 10% van de staaf lengte. De in rekening te brengen effectieve torsiestijfheid is dan:

$$I_t = I_{tor} \{k_{M\text{sinus}} (1 + 1,05C_{tw}) + k_{M\text{constant}} (1 + 0,45C_{tw})\} \quad (\text{B3.65})$$

Hierin is: $k_{M\text{sinus}}$ = het sinusvormige deel van het maximale torsiemoment
 $k_{M\text{constant}}$ = het constante deel van het maximale torsiemoment

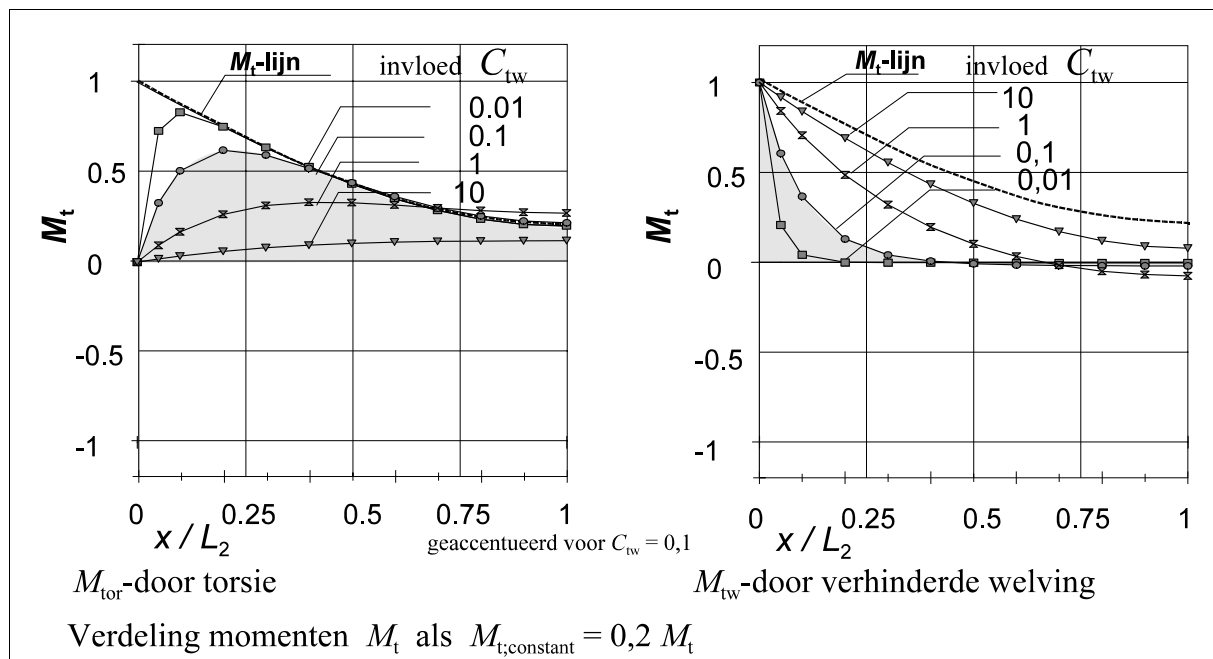
Bij een constant deel van het totale torsiemoment van maximaal: 20 % wordt dit:

- voor een positief constant deel (door een positieve excentriciteit): $I_t = I_{tor} (1 + 0,93C_{tw})$
- respectievelijk voor een negatieve excentriciteit: $I_t = I_{tor} (1 + 1,17C_{tw})$

Hoewel deze verschillen relatief groter zijn dan bij staven op twee steunpunten loont het in de praktijk niet of nauwelijks de moeite om ze in rekening te brengen. De afwijkingen bij grotere excentriciteiten nemen echter snel toe. Daarom wordt aanbevolen voor een ingeklemde uitkraging veilig naar beneden af te ronden. De effectieve torsiestijfheid is dan te vereenvoudigen tot:

$$GI_t = GI_{tor} (1 + k_4 C_{tw}) = GI_{tor} (1 + C_{tw}) \tag{B3.66}$$

Ter informatie wordt voor een ingeklemde uitkraging met een klein constant deel van het torsiemoment ($M_{t,constant} = 0,2 M_{t,max}$, respectievelijk $-0,2 M_{t,max}$) de verdeling in de twee samenstellende componenten M_{tor} en M_{tw} weergegeven in de figuren: B3.22 en B3.23:

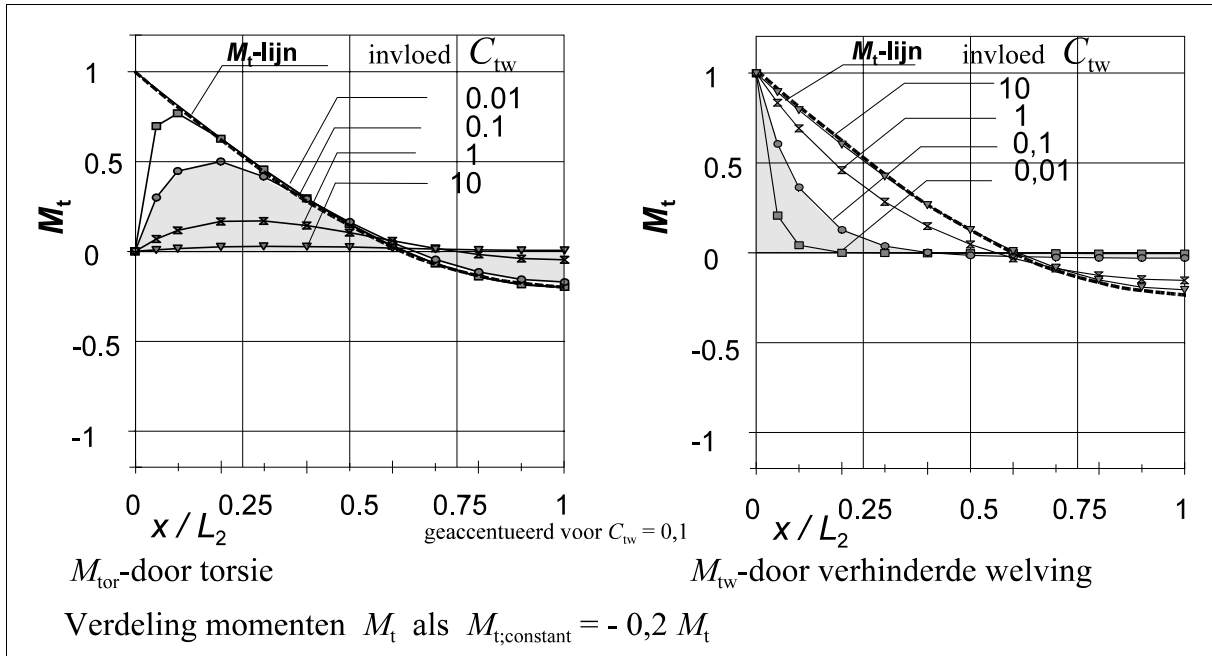


figuur B3.22

Evenals bij een tweezijdig ingeklemde staaf (zie figuren B3.14 respectievelijk B3.15) wordt ook bij een uitkraging het torsiemoment M_t bij de inklemming geheel opgenomen door de welvingscomponent M_{tw} . Opvallend is echter dat bij het vrije eind van de uitkraging de component M_{tor} meestal wel een relatief groot deel van M_t opneemt en dat M_{tw} daar bijna altijd negatief is, waardoor M_{tw} en M_{tor} elkaar dus tegenwerken. Zie ter vergelijking ook het voorbeeld in Bijlage 1 bij literatuurnummer [12] waar dit verschijnsel eveneens werd opgemerkt. Het momentenevenwicht bij het staafeind is uiteraard altijd:

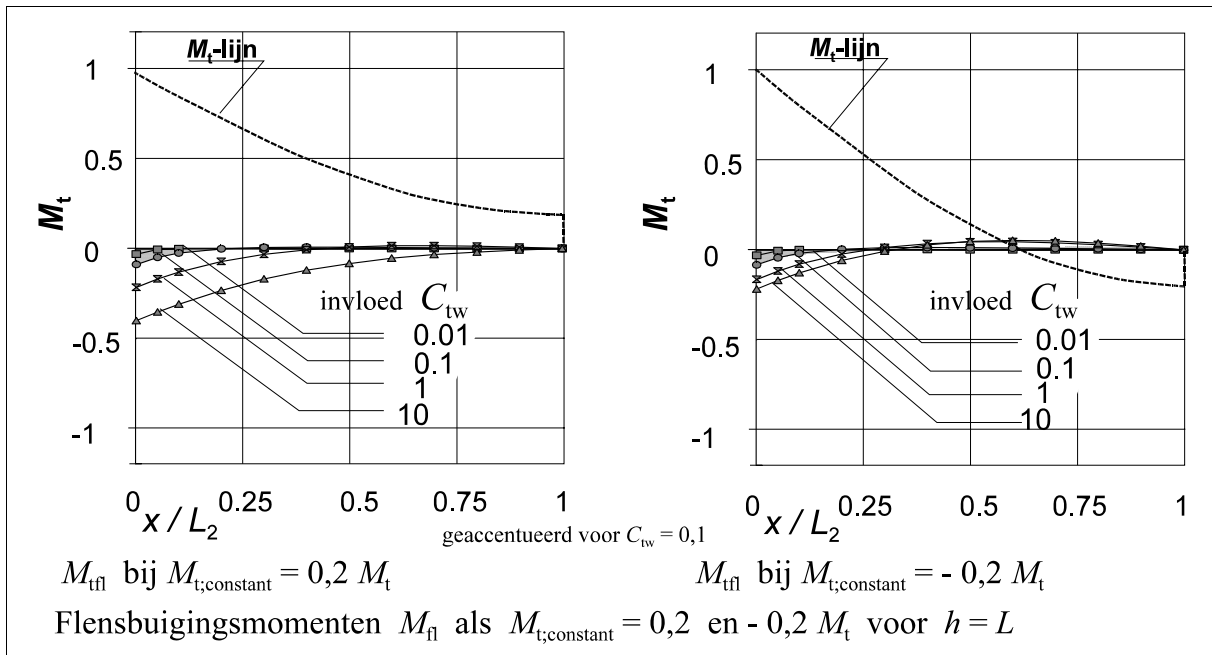
$$M_{tor} + M_{tw} = M_{t,constant} \tag{B3.67}$$

Bij I-profielen is het daarom aan te bevelen deze momentverdeling mogelijk te maken door een kopschot aan te brengen (ook als M_t aan het eind van de staaf nul is).



figuur B3.23

Het verloop van M_{fl} onder invloed van een constant deel van plus en min 20% van het torsiemoment is voor een waarde: $h / L = 1$ weergegeven in figuur B3.24.



figuur B3.24

Bij het staafeind wordt welving van de doorsnede niet verhinderd, zodat daar altijd (ook bij torsiemomenten met een constant deel) geldt: $M_{fl} = 0$.

Bij de inklemming is M_{fl} maximaal en de grootte hiervan in verhouding tot het maximale torsiemoment is weergegeven in figuur B3.25.

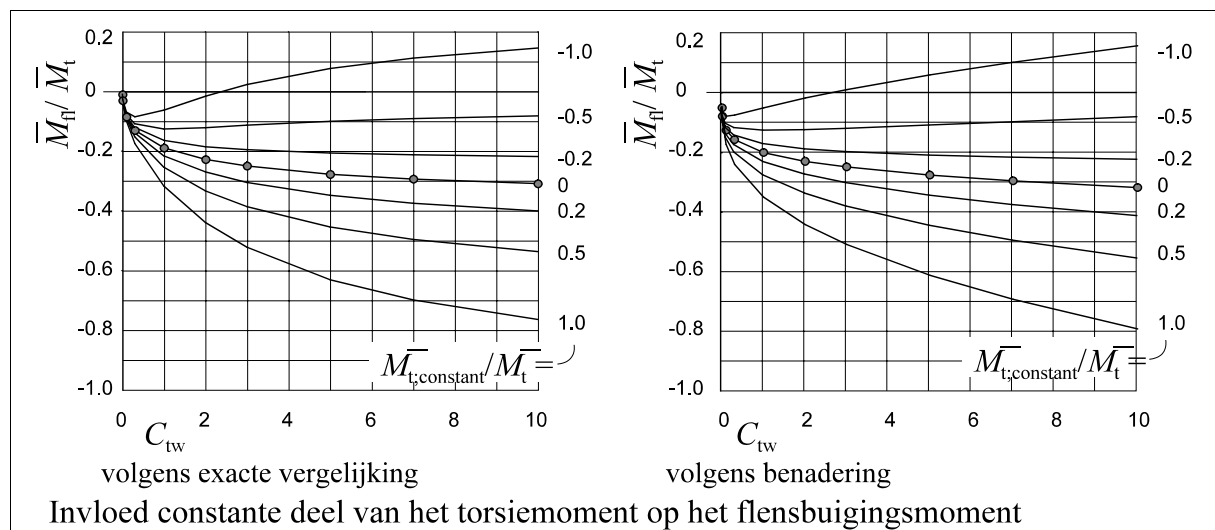
De exacte vergelijking (met hyperbolische termen) is vrij nauwkeurig te benaderen met:

$$\bar{M}_{fl} = -0,2\bar{M}_t \frac{L}{h} \sqrt[5]{C_{tw}} - 0,15\bar{M}_{t,constant} \frac{L}{h} \sqrt[2]{C_{tw}}$$

of:

$$\bar{M}_{fl} = -\frac{\bar{M}_t L}{h} \left(0,2\sqrt[5]{C_{tw}} + 0,15 \frac{\bar{M}_{t,constant}}{\bar{M}_t} \sqrt[2]{C_{tw}} \right) \quad (\text{B3.68})$$

Vergelijk de beide grafieken in figuur B3.25.



figuur B3.25

Voor zeer kleine waarden van C_{tw} geeft (B3.68) altijd te grote (dus veilige) uitkomsten, maar het is te verwachten dat voor uitkragingen met stalen I-profielen de waarde van C_{tw} altijd (veel) groter zal zijn dan 0,1 (zie de tabel in Bijlage B3.1), zodat (B3.68) altijd (ook voor zeer grote waarden van C_{tw} en ook voor een groot constant deel van het torsiemoment) een goede benadering geeft.

De in de flenzen veroorzaakte buigspanningen moeten worden opgenomen door: $W_{fl} = 0,5 W_z$ en de absolute waarde kan worden gesuperponeerd op de maximale buigspanningen ten gevolge van: M_{y1} en M_{z2} . Hun invloed op de sterktoets wordt nagegaan in Hoofdstuk 8.

De diverse in rekening te brengen momenten zijn samengevat in het volgende overzicht:

momenten door torsie:		gevolgen:	
totale torsie-moment	'zuivere' torsie	$\bar{M}_{tor} = GI_{tor} \bar{\varphi}' = \frac{\bar{M}_t}{1 + C_{tw}}$	schuifspanningen, met maximum langs de omtrek van de profieldoorsnede (B3.69)
	verhinderde welving	$\bar{M}_{tw} = -EI_w \bar{\varphi}''' = \bar{M}_t \frac{C_{tw}}{1 + C_{tw}}$	koppel van reactiekrachten in de flenzen, (geen schuifspanningen) (B3.70)
flens-buiging	$\bar{M}_{fl} = -EI_{fl} \bar{v}_{fl}'' =$ $\bar{M}_{fl} = -\frac{\bar{M}_t L}{h} \left(0,2\sqrt[3]{C_{tw}} + \right.$ $\left. + 0,15 \frac{\bar{M}_{t,constant}}{\bar{M}_t} \sqrt[3]{C_{tw}} \right)$		buigspanningen: σ_{mflz} op te nemen door: $W_{fl} = 0,5 W_z$. (B3.71)
	grootste waarde bij de inklemming; in het verdere verloop van de staaf snel dalend tot nul bij het vrije eind.		

B3.4 Conclusies met betrekking tot torsie

1. Het is verantwoord om bij de berekening van de kipstabiliteit de berekening van de invloed van de normaalkracht op de torsie volgens het 'Wagner-effect' buiten beschouwing te laten.
2. De momentcomponent M_{tw} bestaat uit een koppel van reactiekrachten in de flenzen. De bepaling hiervan kan worden vervangen door het in rekening brengen van een toeslag op de torsiestijfheid.
3. Voor de effectieve torsiestijfheid kan dan worden gerekend met:

$$GI_t = GI_{tor} (1 + k_4 C_{tw}) \quad (B3.72)$$

waarbij voor:

rechthoekige doorsneden	welvingsstijfheid is veilig verwaarloosbaar	$k_4 = 0$
I-profielen	uitkraging met gaffeloplegging	$k_4 = 0$
	staaf op twee steunpunten met torsie-inklemming	$k_4 = 5,5$
	alle overige beschouwde gevallen	$k_4 = 1$

-
4. Omdat de 3^{de} afgeleide van de rotatievergelijking dan buiten beschouwing kan blijven worden de berekeningen aanzienlijk vereenvoudigd.
 5. Het flensbuigingsmoment M_{fl} is rechtstreeks af te leiden uit het torsiemoment en de welvingsstijfheid.
 6. De hierdoor veroorzaakte buigspanningen worden opgenomen door een weerstandsmoment: $W_{fl,z} = 0,5 W_z$. Zij kunnen worden gesuperponeerd op de buigspanningen ten gevolge van M_{y1} en M_{z2} .

Bijlage

4

Invloed van vervorming w in de 'sterke' richting en dwarsbelasting q_z in de 'zwakke' richting op de kipstabiliteit

Aangenomen werd dat de vervorming in de sterke richting geen invloed heeft op de kipstabiliteit en dat een eventuele belasting in de 'zwakke' richting geen invloed heeft op de grootte van de 2^{de}-orde factor(en).

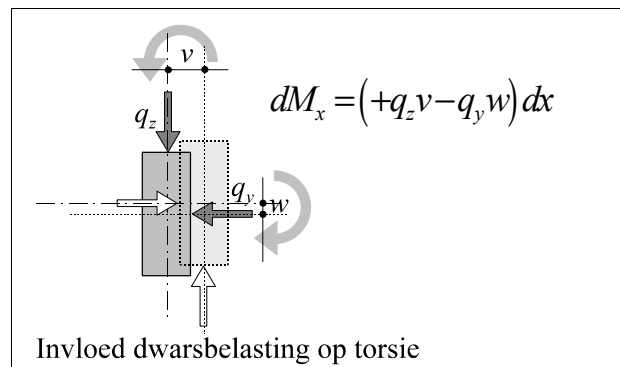
Is dit verantwoord? Ja, mits deze invloeden verwaarloosbaar klein zijn.
Stel: maximaal enkele procenten.

Onderzocht wordt een representatief geacht belastinggeval met de volgende uitgangspunten:

- gelijkmatig verdeelde belasting: in de 'sterke'-richting: eventueel excentrisch aangrijpend
in de 'zwakke' richting: centrisc h aangrijpend
- torsiebelasting: alleen van de 2^{de}-orde, niet van de 1^{ste}-orde.
- initiële vervormingen: alleen in de 'zwakke' richting (v_0), niet in de 'sterke' richting, en ook geen initiële rotatie langs de x -as.

$$\text{Dus: } w = w_1 + w_2 \quad v = v_0 + v_1 + v_2 \quad \varphi = \varphi_2. \quad (\text{B4.01})$$

De belasting in de 'zwakke' richting veroorzaakt een tegenwerkend torsiemoment ten opzichte van het torsiemoment door de belasting in de 'sterke' richting, zoals is weergegeven in figuur B4.1:



figuur B4.1

Aan Hoofdstuk 4 formule (4.08) zijn benodigde de gegevens voor de verdere uitwerking te ontlenen:

buiging om de y -as	$M_{y2} = +F_c w - M_{x1} v' - M_{z1} \phi = -EI_y w_2''$	(4.08)
buiging om de z -as	$M_{z2} = +M_{x1} w' + F_c v + M_{y1} \phi = -EI_z v_2''$	
rotatie om de x -as	$M_{t2} = -M_{z1} w' + M_{y1} v' + M_{x2} = +GI_t \phi$	

Ter vereenvoudiging wordt aangenomen dat alle vervormingen (nagenoeg) volgens sinuslijnen verlopen en dat hogere Fouriertermen worden verwaarloosd.

Met behulp van:

$$F_{Ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \quad \text{en} \quad F_{Ez} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$$

en met de in de Hoofdstukken 5 en 6 gevonden uitkomsten kan dit worden geschreven in matrixnotatie:

$$\begin{bmatrix} -F_{Ey} \frac{\bar{w}_2}{\bar{w}} + F_c & 0 & -0,88\bar{M}_{z1} \\ 0 & -F_{Ez} \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} + F_c & +0,88\bar{M}_{y1} \\ -0,88\bar{M}_{z1} & +0,88\bar{M}_{y1} & -0,81\bar{M}_{y1}e - GI_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{v} \\ \bar{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B4.02})$$

Volgens de methodiek van deze dissertatie zijn de 2^{de}-orde termen:

$$\frac{1}{n_y^*} = \frac{\bar{w}_2}{\bar{w}} \quad \text{en} \quad \frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}}$$

De evenwichtstoestand wordt weer gevonden als de determinant van de matrix nul is, dus:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{F_{Ey}}{n_y^*} + F_c \right) \left(-\frac{F_{Ez}}{n_z^*} + F_c \right) (-0,81\bar{M}_{y1}e - GI_t) + \\ & - \left(-\frac{F_{Ey}}{n_y^*} + F_c \right) (+0,88\bar{M}_{y1})^2 - \left(-\frac{F_{Ez}}{n_z^*} + F_c \right) (-0,88\bar{M}_{z1})^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B4.03})$$

Dit is om te werken tot een overzichtelijker vorm:

$$\frac{(0,88\bar{M}_{y1})^2}{\left(\frac{1}{n_z^*} - \frac{F_c}{F_{Ez}}\right)F_{Ez}(0,81\bar{M}_{y1}e + GI_t)} + \frac{(0,88\bar{M}_{z1})^2}{\left(\frac{1}{n_y^*} - \frac{F_c}{F_{Ey}}\right)F_{Ey}(0,81\bar{M}_{y1}e + GI_t)} = 1 \quad (\text{B4.04})$$

De eerste twee rijen van de stijfheidsmatrix zijn ook te schrijven als:

$$\begin{bmatrix} -\frac{F_{Ey}}{n_y^*} + F_c & 0 & -0,88\bar{M}_{z1} \\ 0 & -\frac{F_{Ez}}{n_z^*} + F_c & +0,88\bar{M}_{y1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{v} \\ \bar{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B4.05})$$

Hieruit kan $\bar{\varphi}$ worden geëlimineerd met:

$$0,88\bar{\varphi} = \left(-\frac{F_{Ey}}{n_y^*} + F_c\right) \frac{\bar{w}}{\bar{M}_{z1}} = -\left(-\frac{F_{Ez}}{n_z^*} + F_c\right) \frac{\bar{v}}{\bar{M}_{y1}} \quad \text{of:}$$

$$\left(-\frac{1}{n_y^*} + \frac{F_c}{F_{Ey}}\right) \bar{M}_{y1} F_{Ey} \bar{w} = \left(\frac{1}{n_z^*} - \frac{F_c}{F_{Ez}}\right) \bar{M}_{z1} F_{Ez} \bar{v} \quad (\text{B4.06})$$

Uit de aard van belastingen en vervormingen volgt dat al deze termen van hetzelfde teken, dus positief, moeten zijn, met als consequentie dat dus ook:

$$\left(-\frac{1}{n_y^*} + \frac{F_c}{F_{Ey}}\right) > 0 \quad \text{en dus:} \quad \frac{1}{n_y^*} - \frac{F_c}{F_{Ey}} < 0 \quad (\text{B4.07})$$

Hieruit volgen drie conclusies:

1. Aanwezigheid van een dwarsbelasting in de 'zwakke' richting veroorzaakt:
 òf een vergroting van de oorspronkelijke: $n_y^* = F_{Ey} / F_c$,
 òf een negatieve n_y^* .
2. Is er geen axiale drukkracht aanwezig is wordt n_y^* altijd negatief.
3. In al deze gevallen leidt dit tot een vermindering van de verplaatsing.

Wanneer (B4.07) wordt ingevuld in (B4.04) wordt de noemer van de tweede term (en dus de gehele tweede term) negatief, met als gevolg dat de eerste term groter dan 1 wordt:

$$\frac{(0,88\bar{M}_{y1})^2}{\left(\frac{1}{n_z^*} - \frac{F_c}{F_{Ez}}\right)F_{Ez}(0,81\bar{M}_{y1}e + GI_t)} > 1 \quad \text{en dus (met: } k_1 = 0,88 \text{ en } k_2 = 0,81) \text{ geldt:}$$

$$\frac{1}{n_z^*} < \frac{1}{n_z^* \text{ zonder dwarsbelasting}} = \frac{(k_1\bar{M}_{y1})^2}{(M_{kr}^2 + k_2\bar{M}_{y1}eF_{Ez})} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (\text{B4.08})$$

Bij een zijdelingse belasting in de 'zwakke' richting wordt n_z^* dus altijd groter.

Overigens is aan figuur B4.1 ook al duidelijk te zien dat de combinatie van belasting q_y en de verplaatsing w een tegenwerkend torsiemoment veroorzaakt en dus in principe een gunstige invloed heeft op het 2^{de}-orde effect.

Deze invloed is vrij klein, zoals uit het vervolg zal blijken, zodat een (zeer) nauwkeurige berekening niet nodig is.

De 1^{ste}-orde verplaatsing door de belasting $\bar{w}_1 = 0,003L$ is meestal van dezelfde orde van grootte als de initiële verplaatsing: $\bar{v}_1 = (1/500 \text{ 'a } 1/300)L$.

Als bij benadering wordt aangehouden: $\bar{v}_0 \approx \bar{w}_1$ worden de 1^{ste}-orde verplaatsingen:

$$\frac{\bar{v}_0 + \bar{v}_1}{\bar{w}_1} \approx \frac{\bar{w}_1 + \bar{v}_1}{\bar{w}_1} = 1 + \frac{\bar{v}_1}{\bar{w}_1} = 1 + \frac{\bar{M}_{z1}}{F_{Ez}} \frac{F_{Ey}}{\bar{M}_{y1}}$$

met als uiteindelijke verplaatsingen:

$$\frac{\bar{v}}{\bar{w}} = \frac{(\bar{v}_0 + \bar{v}_1) \frac{n_z^*}{n_z^* - 1}}{\bar{w}_1 \frac{n_y^*}{n_y^* - 1}} = \left(1 + \frac{\bar{M}_{z1}}{F_{Ez}} \frac{F_{Ey}}{\bar{M}_{y1}}\right) \frac{n_z^*}{n_y^*} \cdot \frac{n_y^* - 1}{n_z^* - 1} \quad (\text{B4.09})$$

Omdat de invloed van de dwarsbelasting op de termen n_y^* en n_z^* maximaal is als de axiale drukkracht zo klein mogelijk, dus nul, kan (B4.06) worden geschreven als:

$$\frac{\bar{v}}{\bar{w}} = \frac{\bar{M}_{y1}F_{Ey}}{\bar{M}_{z1}F_{Ez}} \frac{1}{n_y^*} + \frac{F_c}{F_{Ez}} = - \frac{n_z^* \bar{M}_{y1} F_{Ey}}{n_y^* \bar{M}_{z1} F_{Ez}} \quad (\text{B4.10})$$

Uit (B4.09) en (B4.10) is nu de verhouding \bar{v}/\bar{w} te elimineren:

$$\frac{\bar{v}}{\bar{w}} = \left(1 + \frac{\bar{M}_{z1} F_{Ey}}{F_{Ez} \bar{M}_{y1}} \right) \frac{n_z^* n_y^* - 1}{n_z^* - 1 n_y^*} = - \frac{n_z^* \bar{M}_{y1} F_{Ey}}{n_y^* \bar{M}_{z1} F_{Ez}} \text{ waaruit volgt:}$$

$$n_z^* + (n_y^* - 1) \frac{\bar{M}_{z1}}{\bar{M}_{y1}} \left(\frac{F_{Ez}}{F_{Ey}} + \frac{\bar{M}_{z1}}{\bar{M}_{y1}} \right) = 1 \quad (\text{B4.11})$$

Als voor het hier gestelde doel ter vereenvoudiging verder wordt uitgegaan van een centrisch aangrijpende belasting met: $e = 0$ (en, zoals hiervoor al is gemotiveerd, zonder axiale drukkracht, dus met: $F_c = 0$) gaat formule (B4.04) over in:

$$n_z^* \frac{(0,88\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2} + n_y^* \frac{F_{Ez}}{F_{Ey}} \frac{(0,88\bar{M}_{z1})^2}{M_{kr}^2} = \frac{n_z^*}{n_{z;oud}^*} + \frac{F_{Ez}}{F_{Ey}} \frac{(\bar{M}_{z1})^2 n_y^*}{(\bar{M}_{y1})^2 n_{z;oud}^*} = 1 \quad (\text{B4.12})$$

Er resulteren nu twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden: n_z^* en n_y^* :

$$\begin{cases} n_z^* + n_y^* A = 1 + A \\ n_z^* + n_y^* B = n_{z;oud}^* \end{cases} \text{ waarin: } A = \frac{\bar{M}_{z1}}{\bar{M}_{y1}} \left(\frac{F_{Ez}}{F_{Ey}} \frac{\bar{M}_{z1}}{\bar{M}_{y1}} \right) \text{ en: } B = \frac{F_{Ez}}{F_{Ey}} \left(\frac{\bar{M}_{z1}}{\bar{M}_{y1}} \right)^2$$

met als oplossing:

$$n_z^* = \frac{n_{z;oud}^* A - (1 + A) B}{A - B} \text{ en: } n_y^* = \frac{n_{z;oud}^* - (1 + A)}{B - A} \quad (\text{B4.13})$$

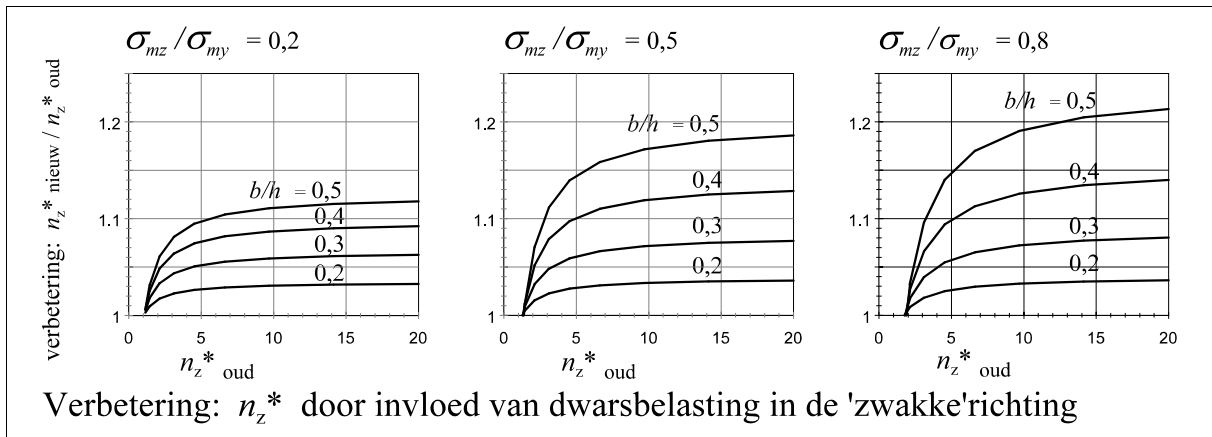
Hiermee is, uitgaande van de oorspronkelijke 2^{de}-ordeterm $n_{z;oud}^*$, de nieuwe 2^{de}-orde term n_z^* berekend voor enkele combinaties van verhoudingen in belastingen en staafafmetingen:

1 ^{ste} -orde buigspanningen:	$\bar{\sigma}_{mz1} / \bar{\sigma}_{my1} =$	0,2	0,5	0,8	
staafdoorsneden: rechthoekig:	$b / h =$	0,2	0,3	0,4	0,5
dit blijkt nagenoeg dezelfde resultaten te geven als I-profielen HE en IPE met:	$b / h =$	0,25	0,50	0,75	1,00

Met deze verhoudingen is het mogelijk een goed beeld te krijgen van de invloed die een eventuele dwarsbelasting in de 'zwakke' richting kan hebben op het 2^{de}-orde effect.

N.B. De berekende waarden van n_y^* zijn negatief en variëren hierbij van circa -0,5 tot -400 zodat de uiteindelijke verplaatsing \bar{w} wordt dus altijd (iets) kleiner wordt dan \bar{w}_1 .

De uitkomsten van de berekening zijn verzameld in figuur B4.2:



figuur B4.2

De volgende conclusies zijn hieruit te trekken:

1. De invloed van dwarsbelasting in de zwakke richting leidt altijd tot een vergroting van de term n_z^* en is dus gunstig voor het 2^{de}-orde-effect met betrekking tot kipstabiliteit.
2. Deze invloed wordt groter bij toenemende dwarsbelasting en/of breedte (stijfheid in de zwakke richting) van de staaf.
3. Deze invloed wordt kleiner naarmate er een grotere axiale drukkracht aanwezig is. Dit is te verwachten omdat het aandeel van de drukkracht nagenoeg onafhankelijk is van de buigende momenten.
4. Zelfs bij zeer brede staven met een relatief grote dwarsbelasting (zie figuur B4.2 de rechter grafiek) is de verbetering van de term n_z^* praktisch niet meer dan circa 20 %. Dit lijkt vrij veel maar de verbetering van de vergrotingsfactor blijft toch maar beperkt tot enkele procenten, zoals is te zien in het volgende voorbeeld:

Een rechthoekige staaf met verhouding doorsnede breedte/hoogte: $b/h = 0,5$ komt overeen met een I-profiel met: $b/h = 1$				
a. oud: zonder dwarsbelasting				
b. nieuw: met dwarsbelasting met buigspanningen: $\sigma_{mz1} = 0,8\sigma_{my1}$				
n_z^* :		vergrotingsfactor:		
oud:	nieuw:	oud:	nieuw:	verbetering:
stel: 2,5	$2,5 \times 1,06 = 2,65$	$2,5 / 1,5 = 1,67$	$2,65 / 1,65 = 1,61$	4 %
stel: 7,5	$7,5 \times 1,18 = 8,85$	$7,5 / 6,5 = 1,15$	$8,85 / 7,85 = 1,13$	2 %

Uiteindelijk is het van belang na te gaan welke veranderingen optreden als de staaf wordt getoetst op sterkte zoals is behandeld in hoofdstuk 8. Daartoe kan worden gebruikt formule (8.6) zonder het aandeel van een axiale drukkracht:

$$\frac{\bar{M}_{y1}}{M_{uy}} + \frac{\bar{M}_{z1}}{M_{uz}} \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} + \frac{F_{Ez} \bar{v}_0}{k_1 M_{uz} (n_z^* - 1)} \leq 1 \quad (\text{B4.14})$$

De laatste term kan met behulp van het voorgaande worden geïnterpreteerd met:

$$\bar{v}_0 \approx \bar{w}_1 = \frac{5\bar{M}_{y1}L^2}{48EI_y} \approx \frac{\bar{M}_{y1}}{F_{Ey}} \quad \text{zodat:}$$

$$\frac{F_{Ez} \bar{v}_0}{k_1 M_{uz} (n_z^* - 1)} \approx \frac{\bar{M}_{y1}}{k_1 M_{uz}} \frac{F_{Ez}}{F_{Ey} (n_z^* - 1)} = \frac{\bar{M}_{y1}}{k_1 M_{uy}} \frac{W_y}{W_z} \frac{I_z}{I_y (n_z^* - 1)} = \frac{\bar{M}_{y1}}{k_1 M_{uy}} \frac{b}{h(n_z^* - 1)}$$

Daarmee kan (B4.14) worden geschreven als:

$$\frac{\bar{\sigma}_{my1}}{f_m} + \frac{\bar{\sigma}_{mz1}}{f_m} \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} + \frac{\bar{\sigma}_{my1}}{k_1 f_m} \frac{b}{h(n_z^* - 1)} \leq 1 \quad (\text{B4.15})$$

Vergeleken worden nu de UC met de 'oude' en de 'nieuwe' waarden van n_z^* :

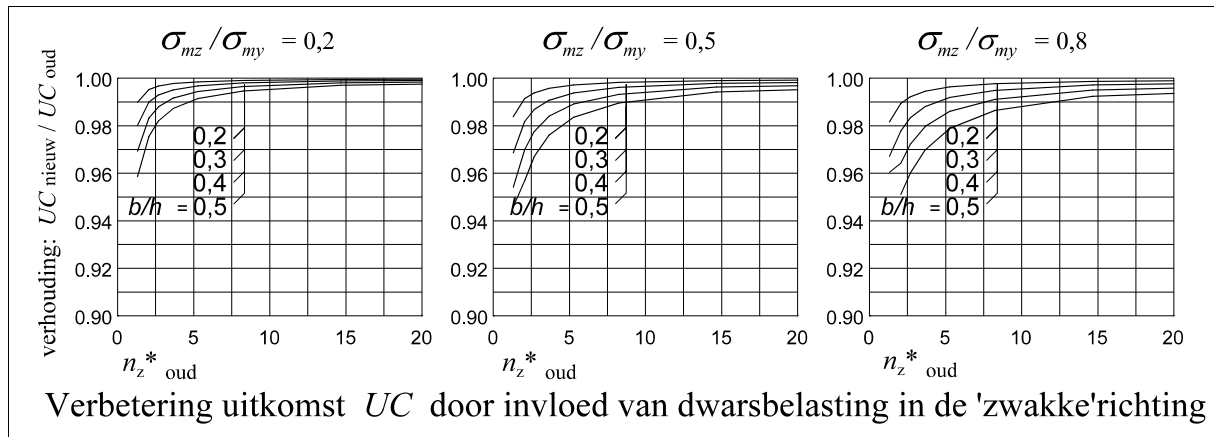
$$\frac{UC_{n_{nw}}^*}{UC_{n_{oud}}^*} = \frac{\frac{\bar{\sigma}_{my1}}{f_m} + \frac{\bar{\sigma}_{mz1}}{f_m} \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} + \frac{\bar{\sigma}_{my1}}{k_1 f_m} \frac{b}{h(n_z^* - 1)}}{\frac{\bar{\sigma}_{my1}}{f_m} + \frac{\bar{\sigma}_{mz1}}{f_m} \frac{n_z^*}{n_z^* - 1} + \frac{\bar{\sigma}_{my1}}{k_1 f_m} \frac{b}{h(n_z^* - 1)}} = \frac{1 + \frac{\bar{\sigma}_{mz1}}{\bar{\sigma}_{my1}} \frac{n_{znw}^*}{n_{znw}^* - 1} + \frac{b}{k_1 h(n_{znw}^* - 1)}}{1 + \frac{\bar{\sigma}_{mz1}}{\bar{\sigma}_{my1}} \frac{n_{zoud}^*}{n_{zoud}^* - 1} + \frac{b}{k_1 h(n_{zoud}^* - 1)}}$$

De hiervoor berekende combinaties zijn gerangschikt op verhoudingen van buigspanningen in beide richtingen en breedte / hoogte van de staaf. Dezelfde rangschikkingen zijn ook bruikbaar om de verhoudingen in de uitkomsten van de UC te bepalen.

Door de vergrotingen van n_z^* moet de uitkomst van de vergelijking altijd kleiner dan 1 worden.

Ter vereenvoudiging is de geringe (gunstige) invloed van de nieuwe negatieve n_y^* buiten beschouwing gelaten.

De uitkomsten van de berekening zijn verzameld in figuur B4.3:



figuur B4.3

Te zien is dat (zoals te verwachten, gelet op het voorgaande) de grootste verbeteringen optreden bij: toenemende dwarsbelasting en/of breedte van de staaf. Zie de rechter grafiek. Toch is deze verbetering uiteindelijk niet veel meer dan enkele procenten.

Algemene conclusies uit het voorgaande:

1. Door de aanwezigheid van een dwarsbelasting in de 'zwakke'richting wordt:
 - a. de term n_z^* groter
 - b. de verplaatsing in de 'sterke' richting kleiner.
2. Zonder aanwezigheid van dwarsbelasting wordt de term n_y^* uitsluitend bepaald door de grootte van een eventuele axiale drukkracht.
3. De berekeningen de vergroting van n_z^* en de correctie op n_y^* zijn zeer ingewikkeld, maar de gevolgen voor het 2^{de}-orde effect en de sterkte-toets zijn zeer gering.
4. Het is dus veilig, tijdbesparend en verantwoord om de invloed van de verplaatsing in de 'sterke' richting en een eventuele zijdelingse belasting op het 2^{de}-orde effect in de 'zwakke' richting te verwaarlozen.

N.B. Alleen het 2^{de}-orde effect door de dwarsbelasting kan verwaarloosd worden. De belasting zelf uiteraard niet.

Bijlage

5

Uitwerking iteratiemethode - stappenplan

De berekeningen worden uitgevoerd met het spreadsheetprogramma "Quattro-Pro 9" volgens een iteratieproces in 20 tabellen. In elke iteratie worden de uitkomsten van v_2 en v uit de vorige iteratie gekopieerd, totdat de resultaten niet meer veranderen. De in de laatste iteratie gevonden definitieve waarden van \bar{v}_2 en \bar{v} vormen daarna de basis voor berekening van n_z^* . Alle 20 iteratietabellen hebben in principe dezelfde opzet en bestaan uit 11 kolommen en 19 rijen waarin de cellen formules en (na invoer van de gegevens) berekende waarden bevatten:

11 kolommen: met de verdeling van de staaf in gelijke delen.

19 rijen: met de berekeningen van de geometrie van de staaf, belastingen en excentriciteit

De rijen zijn genoteerd in de volgorde van het stappenplan zoals behandeld in Hoofdstuk 5:

1	x/L	positie	staaf verdeeld in gelijke delen
2	v_0	initiële verplaatsingen:	$v_0 = \bar{v}_0 \sin \frac{\pi x}{L}$
3	v_1	1 ^{ste} -orde verplaatsingen	(indien van toepassing)
4	v_2	2 ^{de} -orde verplaatsingen	de waarde uit voorgaande iteratie
5	v	totale verplaatsingen	de som van de bovenliggende cellen: $v = v_0 + (v_1) + v_2$
6	v_0''	2 ^{de} afgeleide van v_0	$v_0'' = -\bar{v}_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$
7	v_1''	2 ^{de} afgeleide van v_1	(indien van toepassing)
8	v_2''	2 ^{de} afgeleide van v_2	de berekende waarde uit voorgaande iteratie
9	v''	2 ^{de} afgeleide van v	de som van de bovenliggende cellen: $v'' = v''_0 + (v''_1) + v''_2$
10	M_{v1}	1 ^{ste} -orde moment M_{v1}	berekend uit mechanica

11	M_{t2qv}'	1 ^{ste} afgeleide van het torsiemoment t.g.v. belasting en uitbuiging	$M'_{t2qv} = M_{y1}v''$
12	M_{t2qe}'	idem t.g.v. excentriciteit	$M'_{t2qe} = qe\varphi$
13	M_{t2}	torsiemoment	sommen van $M_{t2qv}' + M_{t2qe}'$ en door numeriek integreren van de termen van rij 11 en 12: $M_{t2(x)} = M_{t2(x-\Delta x)} + 0,5(M'_{t2(x)} + M'_{t2(x-\Delta x)})\Delta x$ te beginnen waar: $M_{t2} = 0$
14	φ	torsie	$\varphi' = \frac{M_t}{GI_t}$
15	φ	rotatie	berekend door numeriek integreren van φ' : $\varphi_{(x)} = \varphi_{(x-\Delta x)} + 0,5(\varphi'_{(x)} + \varphi'_{(x-\Delta x)})\Delta x$ te beginnen waar: $\varphi = 0$
16	M_{z2}	2 ^{de} -orde moment	$M_{z2} = M_{y1}\varphi + F_c v$
17	v_2''	kromming	$v_2'' = -\frac{M_{z2}}{EI_z}$
18	v_2'	1 ^{ste} afgeleide 2 ^{de} -orde verplaatsing	berekend door numeriek integreren van v_2'' : $v'_{2(x)} = v'_{2(x-\Delta x)} + 0,5(v''_{2(x)} + v''_{2(x-\Delta x)})\Delta x$ te beginnen waar: $v_2' = 0$
19	v_2	2 ^{de} -orde verplaatsing	berekend door numeriek integreren van v_2' : $v_{2(x)} = v_{2(x-\Delta x)} + 0,5(v'_{2(x)} + v'_{2(x-\Delta x)})\Delta x$ te beginnen waar: $v_2 = 0$

Dit proces wordt 20 rijen verder herhaald, waarbij de in de rijen 19 en 18 berekende waarden van v_2 en v_2' worden ingevoerd in de rijen: 24 en 28. Als deze waarden niet meer veranderen kan het proces worden beëindigd.

Daarna kan uit de bereikte verhouding tussen de maximale waarden van v en v_2 de gezochte term: n_z^* worden berekend.

N.B. In de volgende tabellen wordt als initiële uitbuiging in rekening gebracht: $v_0 = 1$, waardoor de tabel een overzichtelijk getallenbeeld geeft met 3 cijfers achter de komma. Daardoor lijken de 2^{de}-orde momenten M_{z2} ten opzichte van \bar{M}_{y1} uitzonderlijk groot. Bedacht moet echter worden dat de waarden in de tabel verhoudingsgetallen zijn. In een werkelijke situatie wordt uitgegaan van: $v_0/L = 1/300$ of soms nog minder, waardoor de hiermee evenredige uitkomsten van M_{z2} en M_{t2} eveneens tot de juiste proporties (300 maal zo klein) worden teruggebracht.

B5.1 Staaf op twee steunpunten

B5.1.1 Belast door een constant moment en een axiale drukkracht

Bij dit belastinggeval kunnen voor alle formules sinus- of cosinusfuncties worden ingevuld, zodat een analytische oplossing met behulp van integreren en differentiëren eenvoudig mogelijk is en er daarbij geen andere hulpmiddelen nodig zijn.

B5.1.2 Staaf op twee steunpunten, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting en een axiale drukkracht

De in Hoofdstuk 5 geïntroduceerde hulpfuncties g resulteren uiteindelijk in de constanten k in de formule voor n_z^*

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad \text{zie (5.35)}$$

Aan de resultaten van de laatste iteratie zijn n_z^* en vervolgens de waarden van k_1 en k_2 te ontlenen.

Als voorbeeld kan dienen het volgende belastinggeval. Hierin zijn de gegeven waarden van de geometrie en de belasting vet gedrukt en de afgeleide waarden normaal gedrukt.

L	2,000	\bar{M}_{y1}	1,200	
EI_z	5,000	q	2,400	
GI_t	2,000	e/L	-0,200	
F_{Ez}	12,337	e	-0,400	
M_{kr}	4,967	F_c	3,000	

figuur 5.11

De resultaten van de 1^{ste} berekening (iteratie 0) beginnen op rij 22:

Ter verduidelijking en als voorbeeld zijn de berekende waarden in de cellen van kolom D (t.p.v. $x/L = 0,2$) vet gedrukt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
21	x/L	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
22	$v0$	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
23	$v1$	nvt										
24	$v2$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
25	v	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
26	$v0''$	-0.000	-0.762	-1.450	-1.996	-2.347	-2.467	-2.347	-1.996	-1.450	-0.762	-0.000

27	v_1''	nvt										
28	v_2''	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
29	v''	0.000	-0.762	-1.450	-1.996	-2.347	-2.467	-2.347	-1.996	-1.450	-0.762	-0.000
30	M_{y1}	0.000	0.432	0.768	1.008	1.152	1.200	1.152	1.008	0.768	0.432	0.000
31	M_{t2qv}'	0.000	-0.329	-1.114	-2.012	-2.703	-2.961	-2.703	-2.012	-1.114	-0.329	-0.000
32	M_{t2qe}'	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
33	M_{t2}	1.528	1.503	1.362	1.049	0.573	0.000	-0.573	-1.049	-1.362	-1.503	-1.528
34	ϕ_i'	0.764	0.751	0.681	0.524	0.286	0.000	-0.286	-0.524	-0.681	-0.751	-0.764
35	ϕ	0.000	0.152	0.296	0.418	0.500	0.529	0.500	0.418	0.296	0.152	0.000
36	M_{z2}	0.000	0.993	1.991	2.848	3.429	3.634	3.429	2.848	1.991	0.993	0.000
37	v_2''	-0.000	-0.199	-0.398	-0.570	-0.686	-0.727	-0.686	-0.570	-0.398	-0.199	-0.000
38	v_2'	0.445	0.426	0.366	0.269	0.142	0.000	-0.142	-0.269	-0.366	-0.426	-0.445
39	v_2	0.000	0.088	0.167	0.231	0.273	0.287	0.273	0.231	0.167	0.088	0.000

De berekeningen voor de cellen in kolom D zijn als volgt:

rij		formule spreadsheet	uitkomst
22	v_0	$1 * \sin(\pi * D21)$	$1,00 \sin(0,2\pi) = 0,588$
23	v_1	nvt	
24	v_2	+D19 (bij de volgende iteratie: +D39 enz.)	bij de 1 ^{ste} iteratie is de startwaarde nog nul, wordt bij de volgende gekopieerd uit rij 39 en is dan: 0,167 enz. enz.
25	v	+D11+D12+D13	$0,588+0+0 = 0,588$
26	v_0''	$-D22 * \pi^2 / 2 * B1^2$	$-0,588 * \pi^2 / 2,000^2 = -1,450$
27	v_1''	nvt	
28	v_2''	+D17 (bij de volgende iteratie: +D37 enz.)	bij de 1 ^{ste} iteratie is voorgaande waarde nog nul, wordt bij de volgende: -0,398
29	v''	+D26+D27+D28	$-1,450+0+0 = -1,450$
30	M_{y1}	$+D1 * 4 * D21 * (1 - D21)$	$1,20 * 4 * 0,2 * 0,8 = 0,768$
31	M_{t2qv}'	+D30 * D29	$+0,768 * -1,450 = -1,114$
32	M_{t2qe}'	$+D2 * D4 * D15$ (bij de volgende iteratie: +D35 enz.)	$+2,40 * -0,4 * 0 = 0,000$ bij de 1 ^{ste} iteratie is voorgaande waarde nog nul, wordt bij de volgende: $+2,40 * -0,40 * 0,296 = -0,284$
33	M_{t2}	+E33- $(D31+E31+D32+E32)/2 * C21 * B1$ start bij $x/L = 0,5$ (kolom G) met $M_t = 0$	$+1,049 - (-1,114 - 2,012 + 0 + 0) / 2 * 0,1 * 2,00 = 1.362$
34	ϕ'	+D33 / B3	$1,362 / 2,00 = 0,681$
35	ϕ	$+C35 + (C34 + D34) / 2 * C21 * B1$ start bij $x/L = 0$ (kolom B) met $\phi = 0$	$+0,152 + (0,751 + 0,681) / 2 * 0,1 * 2,00 = 0,296$
36	M_{z2}	+D30 * D35 + D5 * D25	$+0,768 * 0,296 + 3,00 * 0,588 = 1,991$
37	v_2''	-D36 / B2	$-1,991 / 5,00 = -0,398$
38	v_2'	$+E38 - (D37 + E37) / 2 * C21 * B1$ start bij $x/L = 0,5$ (kolom G) met $v_{2t}' = 0$	$+0,269 - (-0,398 - 0,570) / 2 * 0,1 * 1,00 = 0,366$
39	v_2	$+C39 + (C38 + D38) / 2 * C21 * B1$ start bij $x/L = 0$ (kolom B) met $v_2 = 0$	$+0,088 + (0,426 + 0,366) / 2 * 0,1 * 1,00 = 0,167$

De berekende waarden voor v_2'' en v_2 worden in de volgende iteratie gekopieerd naar de rijen 48 en 44, waarna de berekening wordt herhaald totdat de waarden van v_2'' en v_2 niet meer veranderen. De volgende iteratie staat 20 rijen verder, dus van 42 ... 59 enz. enz.

Ter attentie zijn de eindwaarden van v_2 en v vet gedrukt.

De resultaten van de laatste berekening (iteratie 20) beginnen op rij 422:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
421	x/L	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
422	v_0	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
423	v_1	nvt										
424	v_2	0.000	0.129	0.247	0.341	0.402	0.423	0.402	0.341	0.247	0.129	0.000
425	v	0.000	0.438	0.834	1.150	1.353	1.423	1.353	1.150	0.834	0.438	0.000
426	v_0''	-0.000	-0.762	-1.450	-1.996	-2.347	-2.467	-2.347	-1.996	-1.450	-0.762	-0.000
427	v_1''	nvt										
428	v_2''	-0.000	-0.286	-0.581	-0.839	-1.015	-1.078	-1.015	-0.839	-0.581	-0.286	-0.000
429	v''	-0.000	-1.049	-2.032	-2.835	-3.362	-3.545	-3.362	-2.835	-2.032	-1.049	-0.000
430	My_1	0.000	0.432	0.768	1.008	1.152	1.200	1.152	1.008	0.768	0.432	0.000
431	Mt_2qv'	-0.000	-0.453	-1.560	-2.858	-3.873	-4.255	-3.873	-2.858	-1.560	-0.453	-0.000
432	Mt_2qe'	-0.000	-0.260	-0.505	-0.710	-0.847	-0.896	-0.847	-0.710	-0.505	-0.260	-0.000
433	Mt_2	2.732	2.671	2.398	1.834	0.998	0.000	-0.998	-1.834	-2.398	-2.671	-2.732
434	ϕ_i'	1.366	1.336	1.199	0.917	0.499	0.000	-0.499	-0.917	-1.199	-1.336	-1.366
435	ϕ_i	0.000	0.271	0.526	0.740	0.883	0.933	0.883	0.740	0.526	0.271	0.000
436	Mz_2	0.000	1.431	2.907	4.196	5.077	5.390	5.077	4.196	2.907	1.431	0.000
437	v_2''	-0.000	-0.286	-0.581	-0.839	-1.015	-1.078	-1.015	-0.839	-0.581	-0.286	-0.000
438	v_2'	0.656	0.627	0.540	0.398	0.211	0.000	-0.211	-0.398	-0.540	-0.627	-0,656
439	v_2	0.000	0.129	0.247	0.341	0.402	0.423	0.402	0.341	0.247	0.129	0.000

Resultaat: de uitkomsten van iteratie 19, waarvan v_2 (uit rij 419) is gekopieerd in rij 424 zijn gelijk aan die van iteratie 20, waar de laatste v_2 is berekend in rij 439.

Aan de definitieve verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 (kolom G) is te ontlennen: $n_z^* = \frac{1,423}{0,423} = 3,36$

Met de ontwikkelde formule wordt dit:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,88 \times 1,200)^2}{4,967^2 - 0,81 \times 1,200 \times 0,400 \times 12,337} + \frac{3,000}{12,337} = \frac{1,12}{24,67 - 4,80} + 0,24 =$$

$$= 0,06 + 0,24 = 0,30 = \frac{1}{3,34}$$

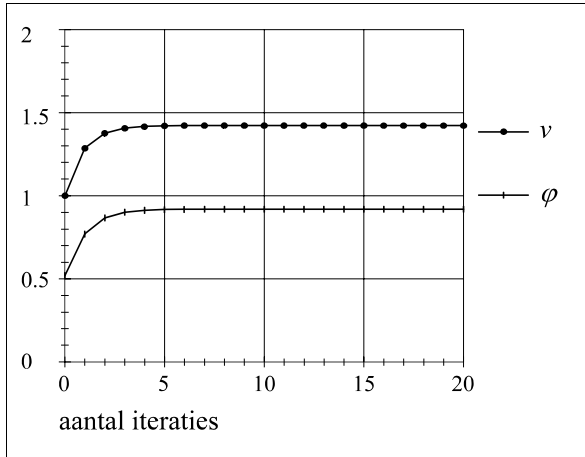
Het verschil tussen 3,36 en 3,34 is slechts 0,7%.

Beoordeling verloop iteraties

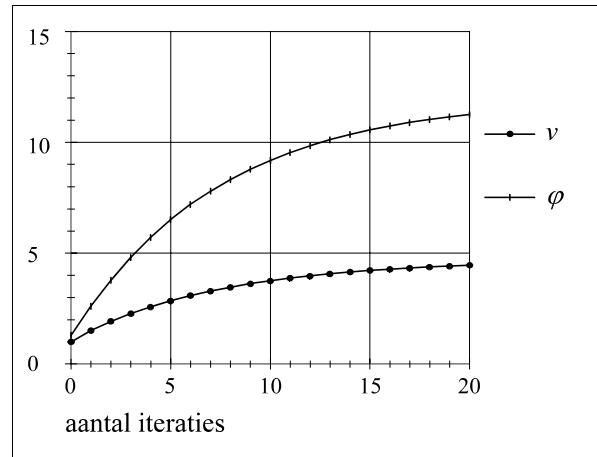
Als de per iteratie opeenvolgende waarden van v en ϕ in een grafiek worden weergegeven kan eenvoudig visueel worden beoordeeld of de vervormingen tenslotte constant blijven bij het ingestelde aantal van 20 iteraties. Zie figuur B5.1.

Bij een grotere belasting (of geringere stijfheid) zijn er (veel) meer dan 20 iteraties nodig om tot een eindresultaat te komen. Voor grotere belasting (met b.v. $\bar{M}_{y1} = 3,00$) zie figuur B5.2.

N.B. De waarden van de rotaties φ worden nu veel groter dan de verplaatsingen v .



figuur B5.1

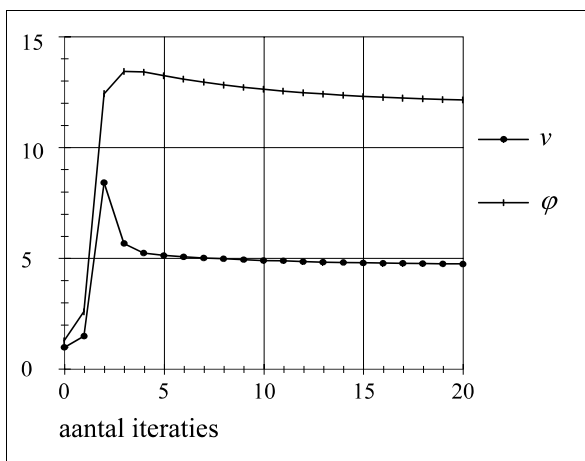


figuur B5.2

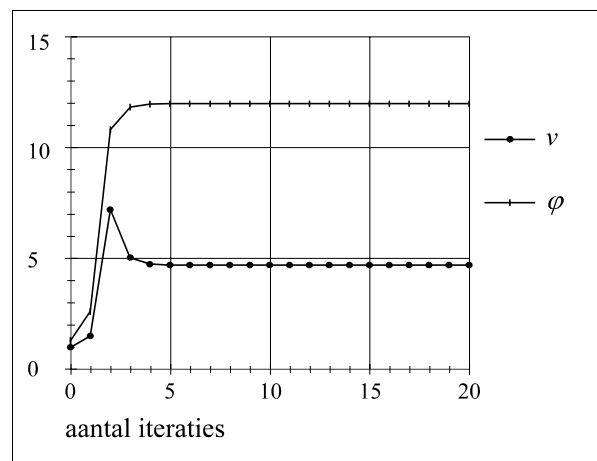
De vervormingen blijven nu nog stijgen en het is lastig om het eind hiervan te schatten. Om toch het aantal iteraties te beperken is voorafgaand aan de 3^{de} iteratie een "versnellingsfactor" ingebouwd waarmee de uit de 2^{de} iteratie over te nemen waarden van v_2 en φ_2 eenmalig geforceerd kunnen worden vergroot met een willekeurig te kiezen vermenigvuldigingsfactor, in dit geval (een iets te groot getal) 8, waarna de vervorming weer gaat afnemen en bij iteratie 20 nauwelijks meer daalt. Zie figuur B5.3.

De eindwaarde van v zal dus uiteindelijk liggen tussen ca. 4 en ca. 4,8.

Met de "terugrekenfunctie" van de spreadsheet is te bepalen dat in dit geval bij een versnellingsfactor 6,684 de waarden van de tabel na iteratie 5 niet meer veranderen en er een definitieve waarde wordt bereikt van: $v = 4,46$. Zie figuur B5.4.



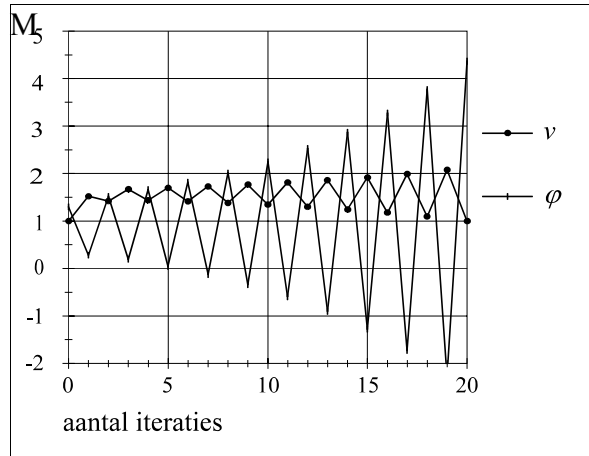
figuur B5.3



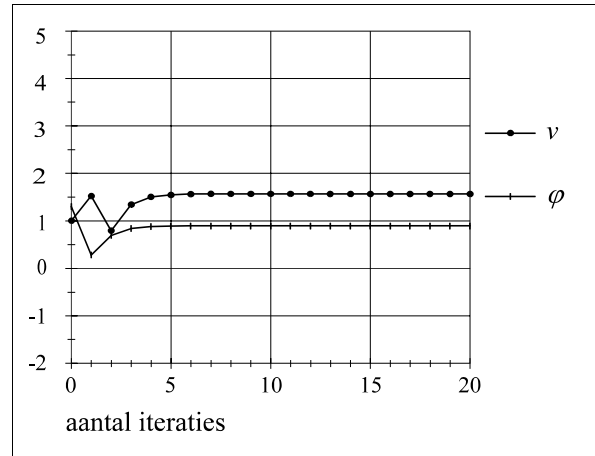
figuur B5.4

Er zijn ook gevallen mogelijk waarbij de resultaten van de iteraties om de eindwaarde heen en weer blijven schommelen. Dit kan zich voordoen bij een (zeer) grote positieve excentriciteit, waarbij een grote rotatie steeds weer tot een tekenomslag kan leiden.

Voor dezelfde belasting maar nu met $e/L = +0,55$ zie het resultaat in figuur B5.5.



figuur B5.5



figuur B5.6

et de door de terugrekenfunctie bepaalde factor $-0,035$ wordt het resultaat zoals getoond in figuur B5.6, waarbij zowel v als φ vanaf iteratie 5 constant blijven.

De aanvankelijk geconstateerde wisselingen in de opvolgende iteraties treden in werkelijkheid uiteraard niet op omdat de constructie zich in een natuurlijk proces geleidelijk aan de belasting aanpast. Dit in tegenstelling tot de iteratieberekeningen die steps- of sprongsgewijze verlopen, maar uiteindelijk wel een betrouwbare voorspelling leveren.

Voor de in Hoofdstuk 5.1.2 voorkomende belastinggevallen volgen nu de resultaten van de laatste iteratie. Er is steeds uitgegaan van de volgende gegevens:

L	1,000	\bar{M}_{y1}	1,000
EI_z	1,000	q	8,000
GI_t	1,000	e/L	variabel
F_{Ez}	9,870	e	variabel
M_{kr}	3,142	F_c	variabel

gelijkmatig verdeelde belasting

figuur 5.5 copie

a. Centrische belasting: $e = 0$ en $F_c = 0$

De resultaten van de laatste iteratie zijn:

x/L	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
v0	0,000	0,309	0,588	0,809	0,951	1,000	0,951	0,809	0,588	0,309	0,000
v2	0,000	0,024	0,047	0,067	0,080	0,084	0,080	0,067	0,047	0,024	0,000
v	0,000	0,333	0,635	0,876	1,031	1,084	1,031	0,876	0,635	0,333	0,000
v0''	0,000	-3,050	-5,801	-7,985	-9,387	-9,870	-9,387	-7,985	-5,801	-3,050	0,000
v2''	0,000	-0,099	-0,342	-0,635	-0,869	-0,958	-0,869	-0,635	-0,342	-0,099	0,000
v''	0,000	-3,149	-6,144	-8,620	-10,255	-10,828	-10,255	-8,620	-6,144	-3,149	0,000
My1	0,000	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0,360	0,000
Mt2qv'	0,000	-1,134	-3,932	-7,240	-9,845	-10,828	-9,845	-7,240	-3,932	-1,134	0,000
Mt2qe'	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Mt2	2,756	2,713	2,467	1,908	1,046	0,000	-1,046	-1,908	-2,467	-2,713	-2,756
phi'	2,756	2,713	2,467	1,908	1,046	0,000	-1,046	-1,908	-2,467	-2,713	-2,756
phi	0,000	0,274	0,535	0,756	0,905	0,958	0,905	0,756	0,535	0,274	0,000
Mz2	0,000	0,099	0,342	0,635	0,869	0,958	0,869	0,635	0,342	0,099	0,000
v2''	0,000	-0,099	-0,342	-0,635	-0,869	-0,958	-0,869	-0,635	-0,342	-0,099	0,000
v2'	0,242	0,239	0,217	0,168	0,092	0,000	-0,092	-0,168	-0,217	-0,239	-0,242
v2	0,000	0,024	0,047	0,067	0,080	0,084	0,080	0,067	0,047	0,024	0,000

Aan de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 te ontleen: $n_z^* = \frac{1,084}{0,084} = 12,90$

Dit ingevuld in de formule voor n_z^* leidt tot: $\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{12,90} = \frac{(k_1 \times 1)^2}{3,142^2 + 0} + \frac{0}{9,870}$

waaruit volgt: $k_1 = \sqrt{\frac{3,142^2}{12,90}} = 0,875$

Eigenwaarde uiterste grenssituatie

De zogenoemde 'eigenwaarde' van het stabiliteitssysteem, waarbij n_z^* nadert tot 1 wordt gevonden door in de spreadsheet de belasting verder op te voeren tot een waarde bereikt wordt van: $n_z^* = 1,004$. Hierbij wordt gevonden een kritische belasting $\bar{M}_{y1} = 3,54$, waaruit dan volgt:

$$k_1 = \frac{1}{3,54} \sqrt{\frac{3,142^2}{1,004}} = 0,886$$

Dit komt geheel overeen met de in de literatuur gevonden kritische belasting, waarvoor o.a. Timoshenko [6b], op bladzijde 269 formule (6-39), geeft:

$$(qL)_{kr} = \frac{28,3\sqrt{EI_z GI_t}}{L^2} \quad \text{of:} \quad \frac{qL^2}{8} = \frac{28,3}{8\pi} \left(\frac{\pi\sqrt{EI_z GI_t}}{L} \right) = 1,126 M_{kr}$$

met als vergelijkbaar resultaat:

$$k_1 = \frac{1}{1,126} = 0,888$$

Kleine belasting

Een kleine belasting met bij voorbeeld: $\bar{M}_{y1} = 0,30$ leidt tot: $n_z^* = \frac{0,007}{1,007} = 144$

waaruit volgt:

$$k_1 = \frac{1}{0,3} \sqrt{\frac{3,142^2}{144}} = 0,872$$

Grote belasting

Een grote belasting met bijvoorbeeld: $\bar{M}_{y1} = 2,50$ leidt tot: $n_z^* = \frac{1,965}{0,965} = 2,036$

waaruit volgt:

$$k_1 = \frac{1}{2,5} \sqrt{\frac{3,142^2}{2,036}} = 0,880$$

Omdat het onveilig is om zo te construeren dat de factor n_z^* (te) dicht nadert tot 1 kan voor alle belastingen met: $n_z^* > 2$ als praktische waarde worden aanbevolen:

$$k_1 = 0,88$$

De afgeronde reciproque waarde hiervan (1,13) is terug te vinden in zeer veel geraadpleegde literatuur waaronder de Nederlandse normen NEN 6760 Houtconstructies TGB 1990 (tabel C.1) en NEN 6771 Staalconstructies 1990 - stabiliteit (tabel 9).

b. Excentrische belasting: $e \neq 0$ en $F_c = 0$

Voor een excentrisch aangrijpende belasting wordt eerst uitgegaan van een zeer grote excentriciteit met: $e = 0,5 L$. De resultaten van de laatste berekening (iteratie 20) zijn:

x/L	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$v0$	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
$v2$	0.000	0.017	0.033	0.046	0.055	0.059	0.055	0.046	0.033	0.017	0.000
v	0.000	0.326	0.621	0.855	1.007	1.059	1.007	0.855	0.621	0.326	0.000

v_0''	-0.000	-3.050	-5.801	-7.985	-9.387	-9.870	-9.387	-7.985	-5.801	-3.050	-0.000
v_2''	-0.000	-0.067	-0.236	-0.441	-0.607	-0.670	-0.607	-0.441	-0.236	-0.067	-0.000
v''	-0.000	-3.117	-6.037	-8.425	-9.993	-10.540	-9.993	-8.425	-6.037	-3.117	-0.000
My_1	0.000	0.360	0.640	0.840	0.960	1.000	0.960	0.840	0.640	0.360	0.000
$Mt_{2qv'}$	-0.000	-1.122	-3.864	-7.077	-9.593	-10.540	-9.593	-7.077	-3.864	-1.122	-0.000
$Mt'_{2e'}$	0.000	0.748	1.472	2.098	2.527	2.680	2.527	2.098	1.472	0.748	0.000
Mt_2	1.870	1.864	1.733	1.364	0.756	0.000	-0.756	-1.364	-1.733	-1.864	-1.870
ϕ_i'	1.870	1.864	1.733	1.364	0.756	0.000	-0.756	-1.364	-1.733	-1.864	-1.870
ϕ_i	0.000	0.187	0.368	0.524	0.632	0.670	0.632	0.524	0.368	0.187	0.000
Mz_2	0.000	0.067	0.236	0.441	0.607	0.670	0.607	0.441	0.236	0.067	0.000
v_2''	-0.000	-0.067	-0.236	-0.441	-0.607	-0.670	-0.607	-0.441	-0.236	-0.067	-0.000
v_2'	0.169	0.166	0.151	0.117	0.065	0.000	-0.065	-0.117	-0.151	-0.166	-0.169
v_2	0.000	0.017	0.033	0.046	0.055	0,059	0.055	0.046	0.033	0.017	0.000

Aan de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is nu te ontleen: $n_z^* = \frac{1,059}{0,059} = 17,95$

Dit leidt tot:
$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{17,95} = \frac{(0,88 \times 1,00)^2}{3,14^2 + k_2 \times 1 \times 0,5 \times 9,87} + \frac{0}{9,87}$$

waaruit volgt:
$$k_2 = \frac{17,95 \times (0,88 \times 1,00)^2 - 3,14^2}{1 \times 0,50 \times 9,87} = 0,817$$

Bij een zeer grote negatieve excentriciteit, bijvoorbeeld: $e/L = -0,5$, zijn de resultaten van de laatste berekening (iteratie 20):

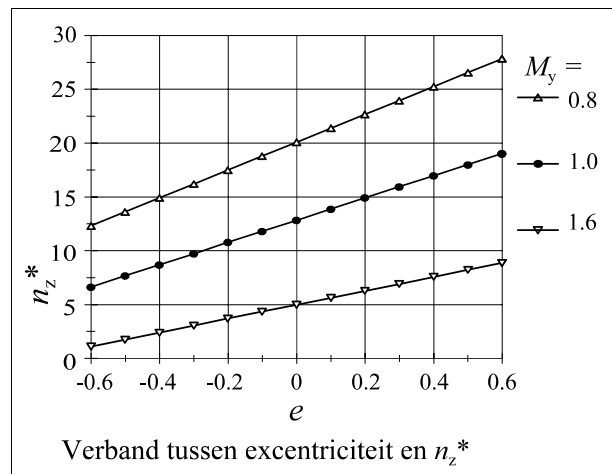
x/L	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
v_0	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
v_2	0.000	0.043	0.084	0.118	0.142	0.150	0.142	0.118	0.084	0.043	0.000
v	0.000	0.352	0.672	0.927	1.093	1.150	1.093	0.927	0.672	0.352	0.000
v_0''	-0.000	-3.050	-5.801	-7.985	-9.387	-9.870	-9.387	-7.985	-5.801	-3.050	-0.000
v_2''	-0.000	-0.179	-0.616	-1.132	-1.540	-1.694	-1.540	-1.132	-0.616	-0.179	-0.000
v''	-0.000	-3.229	-6.418	-9.117	-10.926	-11.563	-10.926	-9.117	-6.418	-3.229	-0.000
My_1	0.000	0.360	0.640	0.840	0.960	1.000	0.960	0.840	0.640	0.360	0.000
$Mt_{2qv'}$	-0.000	-1.163	-4.107	-7.658	-10.489	-11.563	-10.489	-7.658	-4.107	-1.163	-0.000
$Mt_{2qe'}$	-0.000	-1.994	-3.853	-5.392	-6.416	-6.775	-6.416	-5.392	-3.853	-1.994	-0.000
Mt_2	5.037	4.893	4.343	3.290	1.780	0.000	-1.780	-3.290	-4.343	-4.893	-5.037
ϕ_i'	5.037	4.893	4.343	3.290	1.780	0.000	-1.780	-3.290	-4.343	-4.893	-5.037
ϕ_i	0.000	0.498	0.963	1.348	1.604	1.694	1.604	1.348	0.963	0.498	0.000
Mz_2	0.000	0.179	0.616	1.132	1.540	1.694	1.540	1.132	0.616	0.179	0.000
v_2''	-0.000	-0.179	-0.616	-1.132	-1.540	-1.694	-1.540	-1.132	-0.616	-0.179	-0.000
v_2'	0.432	0.425	0.386	0.298	0.164	0.000	-0.164	-0.298	-0.386	-0.425	-0.432
v_2	0.000	0.043	0.084	0.118	0.142	0.150	0.142	0.118	0.084	0.043	-0.000

Aan de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is nu te ontleen: $n_z^* = \frac{1,150}{0,150} = 7,67$

Dit leidt tot:
$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{7,67} = \frac{(0,88 \times 1,00)^2}{3,14^2 - k_2 \times 1 \times 0,50 \times 9,87} + \frac{0}{9,87}$$

waaruit volgt:
$$k_2 = \frac{7,67 \times (0,88 \times 1)^2 - 3,14^2}{-1 \times 0,5 \times 9,870} = 0,798$$

Voor een aantal combinaties van grote en kleine \bar{M}_{y1} en grote en kleine e zijn de uitkomsten van n_z^* berekend en samengevat in figuur B5.7.



figuur B5.7

Te zien is dat het verband tussen e en n_z^* nagenoeg lineair is en zeer nauwkeurig kan worden benaderd met:

$$\begin{aligned} n_z^* &= 20,10 + 12,94 e & \text{voor: } \bar{M}_{y1} &= 0,8 \\ n_z^* &= 12,85 + 10,35 e & \text{voor: } \bar{M}_{y1} &= 1,0 \\ n_z^* &= 5,01 + 6,48 e & \text{voor: } \bar{M}_{y1} &= 1,6 \end{aligned}$$

Dit stemt overeen met de reciproque vorm van de eerder ontwikkelde formule (5.35) zonder axiaalkracht.

$$n_z^* = \frac{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}}{(k_1 \bar{M}_{y1})^2} = \left(\frac{M_{kr}}{k_1 \bar{M}_{y1}} \right)^2 + \frac{k_2 e F_{Ez}}{k_1^2 \bar{M}_{y1}}$$

Voor de hiervoor ingevoerde waarden van \bar{M}_{y1} (en $F_{Ez} = 9,87$) betekent dit:

$$\left(\frac{3,14}{k_1 \times 0,8} \right)^2 = 20,10, \quad \left(\frac{3,14}{k_1 \times 1,0} \right)^2 = 12,85 \quad \text{en} \quad \left(\frac{3,14}{k_1 \times 1,6} \right)^2 = 5,01, \quad \text{respectievelijk:}$$

$$\frac{9,87k_2}{k_1^2 \times 0,8} = 12,94, \quad \frac{9,87k_2}{k_1^2 \times 1,0} = 10,35 \text{ en } \frac{9,87k_2}{k_1^2 \times 1,6} = 6,48,$$

$$\text{waaruit volgt: } k_1 = \frac{3,14}{0,8\sqrt{20,10}} = \frac{3,14}{1,0\sqrt{12,85}} = \frac{3,14}{1,6\sqrt{5,01}} = 0,876, \text{ respectievelijk:}$$

$$k_2 = \frac{0,876^2 \cdot 0,8 \cdot 12,94}{9,87} = \frac{0,8 \cdot 12,94}{12,86} = \frac{1,0 \cdot 10,35}{12,86} = \frac{1,6 \cdot 6,48}{12,86} = 0,806$$

Vanwege de zeer kleine verschillen in uitkomsten (vooral veroorzaakt door afrondingen) kan als gemiddelde waarden voor toepassing in formule (5.35) worden aanbevolen:

$$\boxed{k_1 = 0,88} \text{ en } \boxed{k_2 = 0,81}$$

c. Excentrische belasting: $e \neq 0$ en $F_c \neq 0$

Naarmate de axiale kracht groter wordt zal de uitbuigingslijn onder invloed daarvan steeds dichter een sinuslijn benaderen. In stap 4 van het 'stappenplan' is te zien dat de invloed van een axiale drukkracht F_c feitelijk is te beschouwen als een twee-dimensionaal knikgeval, waardoor de bijdrage hiervan aan de berekening van $1/n_z^*$ nagenoeg evenredig is met de grootte van F_c en onafhankelijk is van de grootte van het moment en van het aangrijpingspunt van de dwarsbelasting.

Voor een gelijkmatig verdeelde belasting is de factor n_z^* dus te berekenen uit de som van de invloeden van dwarsbelasting en axiale belasting:

$$\boxed{\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,88\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,81\bar{M}_{y1}eF_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}}} \quad \text{zie (5.37)}$$

B5.1.3 Staaf op twee steunpunten, belast door een geconcentreerde dwarsbelasting in het midden van de staaf en een axiale drukkracht

De formules in het stappenplan Hoofdstuk 5.1.3 worden op dezelfde manier als hiervoor bij een gelijkmatig verdeelde belasting in Quattro-Pro 9 in tabelvorm uitgewerkt.

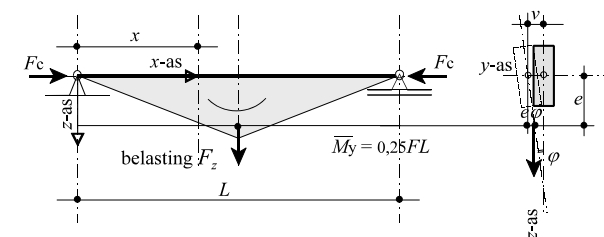
De tabel heeft nu een dubbele kolom voor het midden van de staaf ($x/L = 0,50$) omdat juist links en rechts hiervan het teken van M_t wisselt van + naar -.

Bovendien kan de rij ontbreken voor M_t ten gevolge van de excentriciteit van F_z omdat de waarde hiervan altijd nul is. Deze excentriciteit wordt in rekening gebracht door direct links en rechts van het staafmidden de berekening van M_t te starten met een waarde:

$$M_t = -0,5F_z e \bar{\varphi} \text{ respectievelijk } +0,5F_z e \bar{\varphi}$$

Voor de in Hoofdstuk 5 voorkomende belastinggevallen volgen nu de resultaten van de laatste iteratie. Er is steeds uitgegaan van de volgende gegevens:

L	1,000	\bar{M}_{y1}	1,000
EI_z	1,000	F_z	4,000
GI_t	1,000	e/L	variabel
F_{Ez}	9,870	e	variabel
M_{kr}	3,142	F_c	variabel



geconcentreerde belasting
figuur 5.13 copie

a. Centrische belasting: $e = 0$ en $F_c = 0$

De resultaten van de laatste berekening (iteratie 20) zijn:

x/L	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$v0$	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
$v2$	0.000	0.015	0.030	0.042	0.052	0.055	0.055	0.052	0.042	0.030	0.015	-0.000
v	0.000	0.324	0.617	0.851	1.003	1.055	1.055	1.003	0.851	0.617	0.324	0.000
$v0''$	-0.000	-3.050	-5.801	-7.985	-9.387	-9.870	-9.870	-9.387	-7.985	-5.801	-3.050	-0.000
$v2''$	-0.000	-0.042	-0.166	-0.355	-0.576	-0.768	-0.768	-0.576	-0.355	-0.166	-0.042	-0.000
v''	-0.000	-3.092	-5.967	-8.340	-9.962	-10.638	-10.638	-9.962	-8.340	-5.967	-3.092	-0.000
$My1$	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000	1.000	0.800	0.600	0.400	0.200	0.000
$Mt'FV'$	-0.000	-0.618	-2.387	-5.004	-7.970	-10.638	-10.638	-7.970	-5.004	-2.387	-0.618	-0.000
$Mt2$	2.115	2.092	1.948	1.583	0.934	-0.000	0.000	-0.934	-1.583	-1.948	-2.092	-2.115
phi'	2.115	2.092	1.948	1.583	0.934	-0.000	0.000	-0.934	-1.583	-1.948	-2.092	-2.115
phi	0.000	0.211	0.414	0.592	0.720	0.768	0.768	0.720	0.592	0.414	0.211	0.000
Mz	0.000	0.042	0.166	0.355	0.576	0.768	0.768	0.576	0.355	0.166	0.042	0.000
$v2''$	-0.000	-0.042	-0.166	-0.355	-0.576	-0.768	-0.768	-0.576	-0.355	-0.166	-0.042	-0.000
$v2'$	0.151	0.150	0.140	0.114	0.068	0.000	0.000	-0.068	-0.114	-0.140	-0.150	-0.151
$v2$	0.000	0.015	0.030	0.042	0.052	0.055	0.055	0.052	0.042	0.030	0.015	-0.000

Aan de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is nu te ontleen: $n_z^* = \frac{1,055}{0,055} = 19,12$

Dit ingevuld in de formule voor n_z^* : $\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}}$ zie (5.35)

leidt tot:
$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{19,12} = \frac{(k_1 \times 1)^2}{3,142^2 + 0} + \frac{0}{9,870}$$

waaruit volgt:
$$k_1 = \sqrt{\frac{3,142^2}{19,18}} = 0,717$$

Eigenwaarde uiterste grenssituatie

De zogenoemde 'eigenwaarde' van het stabiliteitssysteem, waarbij n_z^* nadert tot 1 wordt gevonden door in de spreadsheet de belasting verder op te voeren tot een waarde bereikt wordt van: $n_z^* = 1,0004$. Hierbij wordt gevonden een kritische belasting $\bar{M}_{y1} = 4,23$, waaruit dan volgt:

$$k_1 = \frac{1}{4,23} \sqrt{\frac{3,142^2}{1,0004}} = 0,743$$

Dit komt geheel overeen met de in de literatuur gevonden kritische belasting, waarvoor o.a. Timoshenko [6b], blz. 269 formule (6-37), geeft:

$$F_{kr} = \frac{16,94 \sqrt{EI_z GI_t}}{L^2} \left(1 - \frac{1,74e}{L} \sqrt{\frac{EI_z}{GI_t}} \right) \text{ waaruit voor } e = 0 \text{ volgt:}$$

$$\frac{FL}{4} = \frac{16,94}{4\pi} \left(\frac{\pi \sqrt{EI_z GI_t}}{L} \right) = 1,35 M_{kr} \text{ met als vergelijkbaar: } k_1 = \frac{1}{1,35} = 0,742$$

Kleine belasting

Een kleine belasting met bijvoorbeeld: $\bar{M}_{y1} = 0,40$ leidt tot: $n_z^* = \frac{1,0084}{0,0084} = 120$

waaruit volgt:
$$k_1 = \frac{1}{0,4} \sqrt{\frac{3,142^2}{120}} = 0,717$$

Grote belasting

Een grote belasting met bijvoorbeeld: $\bar{M}_{y1} = 3,00$ leidt tot: $n_z^* = \frac{1,942}{0,942} = 2,062$

waaruit volgt:

$$k_1 = \frac{1}{3,0} \sqrt{\frac{3,142^2}{2,062}} = 0,729$$

Omdat het onveilig is om zo te construeren dat de factor n_z^* (te) dicht nadert tot 1 kan voor alle belastingen met: $n_z^* > 2$ als waarde worden aanbevolen:

$$k_1 = 0,73$$

De afgeronde reciproque waarde hiervan ($1/0,73 = 1,37$) is terug te vinden in zeer veel geraadpleegde literatuur waaronder de Nederlandse normen NEN 6760 Houtconstructies TGB 1990 (tabel C.1) en NEN 6771 Staalconstructies 1990 - stabiliteit (tabel 9).

b. Excentrische belasting: $e \neq 0$ en $F_c = 0$

Voor een excentrisch aangrijpende belasting wordt weer uitgegaan van een extreem grote excentriciteit met: $e = 0,5 L$. De resultaten van de laatste berekening (iteratie 20) zijn:

De resultaten van de laatste berekening (iteratie 20) zijn:

x/L	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
v0	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
v2	0.000	0.011	0.021	0.030	0.036	0.039	0.039	0.036	0.030	0.021	0.011	0.000
v	0.000	0.320	0.609	0.839	0.987	1.039	1.039	0.987	0.839	0.609	0.320	0.000
v0''	-0.000	-3.050	-5.801	-7.985	-9.387	-9.870	-9.870	-9.387	-7.985	-5.801	-3.050	-0.000
v2''	-0.000	-0.031	-0.123	-0.259	-0.405	-0.503	-0.503	-0.405	-0.259	-0.123	-0.031	-0.000
v''	-0.000	-3.081	-5.924	-8.243	-9.792	-10.373	-10.373	-9.792	-8.243	-5.924	-3.081	-0.000
My1	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000	1.000	0.800	0.600	0.400	0.200	0.000
Mt2Fv'	-0.000	-0.616	-2.370	-4.946	-7.833	-10.373	-10.373	-7.833	-4.946	-2.370	-0.616	-0.000
Mt2	1.579	1.555	1.412	1.050	0.411	-0.503	0.503	-0.411	-1.050	-1.412	-1.555	-1.579
phi'	1.579	1.555	1.412	1.050	0.411	-0.503	0.503	-0.411	-1.050	-1.412	-1.555	-1.579
phi	0.000	0.157	0.307	0.431	0.506	0.503	0.503	0.506	0.431	0.307	0.157	0.000
Mz2	0.000	0.031	0.123	0.259	0.405	0.503	0.503	0.405	0.259	0.123	0.031	0.000
v2''	-0.000	-0.031	-0.123	-0.259	-0.405	-0.503	-0.503	-0.405	-0.259	-0.123	-0.031	-0.000
v2'	0.107	0.105	0.098	0.079	0.046	0.000	0.000	-0.046	-0.079	-0.098	-0.105	-0.107
v2	0.000	0.011	0.021	0.030	0.036	0.039	0.039	0.036	0.030	0.021	0.011	0.000

Aan de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is nu te ontleen: $n_z^* = \frac{1,039}{0,039} = 26,96$

Dit leidt tot:
$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{26,96} = \frac{(0,73 \times 1,00)^2}{3,14^2 + k_2 \times 1 \times 0,5 \times 9,87} + \frac{0}{9,87}$$

waaruit volgt:

$$k_2 = \frac{26,96 \times (0,73 \times 1,00)^2 - 3,14^2}{1 \times 0,50 \times 9,87} = 0,891$$

Bij een grote negatieve excentriciteit $e/L = -0,5$ zijn de resultaten van iteratie 20:

x/L	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
v_0	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
v_2	0.000	0.029	0.058	0.083	0.102	0.109	0.109	0.102	0.083	0.058	0.029	-0.000
v	0.000	0.338	0.646	0.892	1.053	1.109	1.109	1.053	0.892	0.646	0.338	0.000
v_0''	-0.000	-3.050	-5.801	-7.985	-9.387	-9.870	-9.870	-9.387	-7.985	-5.801	-3.050	-0.000
v_2''	-0.000	-0.077	-0.304	-0.666	-1.127	-1.623	-1.623	-1.127	-0.666	-0.304	-0.077	-0.000
v''	-0.000	-3.127	-6.105	-8.651	-10.513	-11.492	-11.492	-10.513	-8.651	-6.105	-3.127	-0.000
My_1	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000	1.000	0.800	0.600	0.400	0.200	0.000
$Mt2Fv'$	-0.000	-0.625	-2.442	-5.191	-8.411	-11.492	-11.492	-8.411	-5.191	-2.442	-0.625	-0.000
Mt_2	3.847	3.823	3.677	3.300	2.621	1.623	-1.623	-2.621	-3.300	-3.677	-3.823	-3.847
phi'	3.847	3.823	3.677	3.300	2.621	1.623	-1.623	-2.621	-3.300	-3.677	-3.823	-3.847
phi	0.000	0.384	0.760	1.111	1.409	1.623	1.623	1.409	1.111	0.760	0.384	0.000
Mz_2	0.000	0.077	0.304	0.666	1.127	1.623	1.623	1.127	0.666	0.304	0.077	0.000
v_2''	-0.000	-0.077	-0.304	-0.666	-1.127	-1.623	-1.623	-1.127	-0.666	-0.304	-0.077	-0.000
v_2'	0.295	0.293	0.274	0.227	0.138	0.000	0.000	-0.138	-0.227	-0.274	-0.293	-0.295
v_2	0.000	0.029	0.058	0.083	0.102	0.109	0.109	0.102	0.083	0.058	0.029	-0.000

Aan de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is nu te ontleen: $n_z^* = \frac{1,109}{0,109} = 10,17$

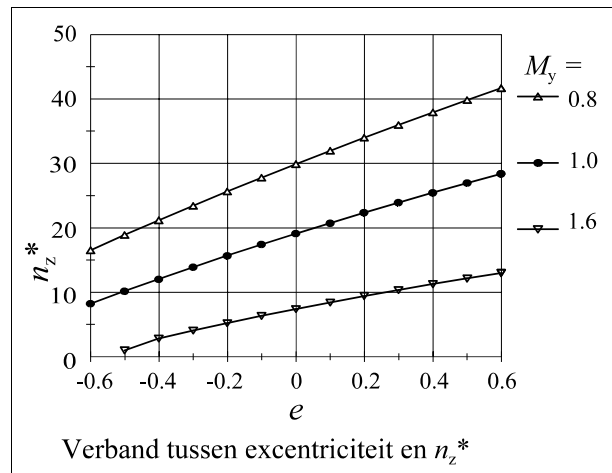
Dit leidt tot:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{10,18} = \frac{(0,73 \times 1,00)^2}{3,14^2 - k_2 \times 1 \times 0,50 \times 9,87} + \frac{0}{9,87}$$

waaruit volgt:

$$k_2 = \frac{10,17 \times (0,73 \times 1)^2 - 3,14^2}{-1 \times 0,5 \times 9,870} = \frac{-4,52}{-4,93} = 0,916$$

Evenals bij het geval van een gelijkmatig verdeelde belasting zijn voor een aantal combinaties van $\bar{M}_{y,1}$ de uitkomsten van n_z^* berekend. Het (nagenoeg) lineaire verband tussen e en n_z^* is weergegeven in figuur B5.8.



figuur B5.8

Te zien is dat het verband tussen e en n_z^* nagenoeg lineair is en zeer nauwkeurig kan worden benaderd met:

$$n_z^* = 29,4 + 20,5 e \quad \text{voor: } \bar{M}_{y1} = 0,8$$

$$n_z^* = 18,5 + 16,5 e \quad \text{voor: } \bar{M}_{y1} = 1,0$$

$$n_z^* = 7,0 + 9,8 e \quad \text{voor: } \bar{M}_{y1} = 1,6$$

Dit stemt overeen met de reciproque vorm van de eerder ontwikkelde formule (5.35) zonder axiaalkracht:

$$n_z^* = \frac{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}}{(k_1 \bar{M}_{y1})^2} = \left(\frac{M_{kr}}{k_1 \bar{M}_{y1}} \right)^2 + \frac{k_2 e F_{Ez}}{k_1^2 \bar{M}_{y1}}$$

Voor de hiervoor ingevoerde waarden van \bar{M}_{y1} (en $F_{Ez} = 9,87$) betekent dit:

$$\left(\frac{3,14}{k_1 \times 0,8} \right)^2 = 29,4, \quad \left(\frac{3,14}{k_1 \times 1,0} \right)^2 = 18,5 \quad \text{en} \quad \left(\frac{3,14}{k_1 \times 1,6} \right)^2 = 7,0, \quad \text{respectievelijk:}$$

$$\frac{9,87 k_2}{k_1^2 \times 0,8} = 20,5, \quad \frac{9,87 k_2}{k_1^2 \times 1,0} = 16,5 \quad \text{en} \quad \frac{9,87 k_2}{k_1^2 \times 1,6} = 9,8,$$

$$\text{waaruit volgt: } k_1 = \frac{3,14}{0,8 \sqrt{29,4}} = \frac{3,14}{1,0 \sqrt{18,5}} = \frac{3,14}{1,6 \sqrt{7,0}} = 0,732, \quad \text{respectievelijk:}$$

$$k_2 = \frac{0,732^2 \cdot 0,8 \cdot 20,5}{9,87} = \frac{0,8 \cdot 16,5}{18,43} = \frac{1,0 \cdot 16,5}{18,43} = \frac{1,6 \cdot 9,8}{18,43} = 0,879$$

Instructief is ook om de uitkomsten van de voorgaande berekeningen zodanig te bewerken dat bij waarden van $n_z^* = 1$ de relatie tussen de eigenwaarde van de belasting (uitgedrukt in de momenten) en de excentriciteit van de belasting kan worden afgebeeld.

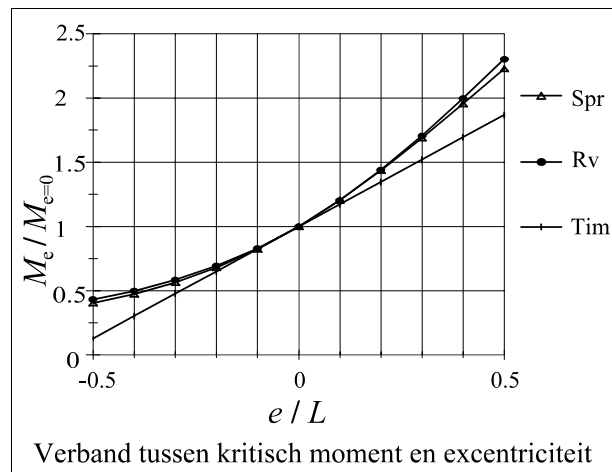
Berekend zijn de verhoudingen van de eigenwaarde bij excentriciteiten van: $-0,5 < e/L < +0,5$ ten opzichte van de eigenwaarde bij $e = 0$.

Van deze verhoudingen zijn drie berekeningen gemaakt:

- Spr: zoals afgeleid uit de aan de grafiek van figuur B5.8 ten grondslag liggende spreadsheetberekeningen,
- Rv: berekend met de hiervoor ontwikkelde formule met $k_1 = 0,73$ en $k_2 = 0,87$
- Tim: berekend met de eerder vermelde formule van Timoshenko [6b], (6-37).

De uitkomsten worden getoond in figuur B5.9:

Te zien is dat de uitkomsten van de berekeningen met de spreadsheet en de ontwikkelde formule zeer goed overeenstemmen.



figuur B5.9

De formule van Timoshenko is alleen bij kleine excentriciteiten nauwkeurig, maar kan bij groter wordende excentriciteiten niet juist zijn, omdat lineaire extrapolatie dan bij negatieve excentriciteit tot een negatieve waarde voor de eigenwaarde van de belasting zou leiden en dat is onbestaanbaar. Overigens geeft de formule van Timoshenko veilige uitkomsten.

Voor kleine excentriciteiten van circa

$-0,2 < e/L < +0,2$ stemmen alle uitkomsten nauwkeurig genoeg overeen.

Voor toepassing in formule (5.50) kan uiteindelijk dus worden aanbevolen:

$$k_1 = 0,73 \quad \text{en} \quad k_2 = 0,87$$

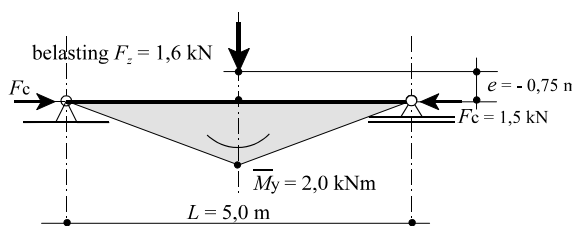
c. Excentrische belasting: $e \neq 0$ en $F_c \neq 0$

Naarmate de axiale kracht groter wordt zal de uitbuigingslijn onder invloed daarvan steeds dichter een sinuslijn benaderen. Evenals bij het geval met gelijkmatig verdeelde belasting is de bijdrage van F_c (aan de berekening van de term $1/n_z^*$) nagenoeg evenredig met de grootte van F_c en onafhankelijk is van de grootte van het moment en van de het aangrijpingspunt van de dwarsbelasting. Voor een geconcentreerde belasting in het midden van de staaf is de term n_z^* dus te berekenen met:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,73\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,87\bar{M}_{y1}eF_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}}$$

Tenslotte volgt de uitwerking van het voorbeeld uit Hoofdstuk 5.1.3 met dezelfde gegevens:

L	5,000	\bar{M}_{y1}	2,000
EI_z	12,000	F_z	1,600
GI_t	5,000	e/L	-0,150
F_{Ez}	4,737	e	-0,750
M_{kr}	7,867	F_c	1,500



De resultaten van de laatste berekening (iteratie 20) zijn hierbij:

x/L	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$v0$	0.000	0.309	0.588	0.809	0.951	1.000	1.000	0.951	0.809	0.588	0.309	0.000
$v2$	0.000	0.229	0.440	0.612	0.727	0.768	0.768	0.727	0.612	0.440	0.229	-0.000
v	0.000	0.538	1.028	1.421	1.678	1.768	1.768	1.678	1.421	1.028	0.538	0.000
$v0''$	-0.000	-0.122	-0.232	-0.319	-0.375	-0.395	-0.395	-0.375	-0.319	-0.232	-0.122	-0.000
$v2''$	-0.000	-0.073	-0.153	-0.231	-0.298	-0.345	-0.345	-0.298	-0.231	-0.153	-0.073	-0.000
v''	-0.000	-0.195	-0.385	-0.550	-0.674	-0.739	-0.739	-0.674	-0.550	-0.385	-0.195	-0.000
My	0.000	0.400	0.800	1.200	1.600	2.000	2.000	1.600	1.200	0.800	0.400	0.000
$Mt'Fv$	-0.000	-0.078	-0.308	-0.660	-1.078	-1.479	-1.479	-1.078	-0.660	-0.308	-0.078	-0.000
Mt	1.866	1.851	1.759	1.520	1.086	0.445	-0.445	-1.086	-1.520	-1.759	-1.851	-1.866
phi'	0.373	0.370	0.352	0.304	0.217	0.089	-0.089	-0.217	-0.304	-0.352	-0.370	-0.373
phi	0.000	0.186	0.367	0.532	0.664	0.742	0.742	0.664	0.532	0.367	0.186	0.000
Mz	0.000	0.882	1.835	2.771	3.580	4.136	4.136	3.580	2.771	1.835	0.882	0.000
$v2''$	-0.000	-0.073	-0.153	-0.231	-0.298	-0.345	-0.345	-0.298	-0.231	-0.153	-0.073	-0.000
$v2'$	0.465	0.447	0.391	0.294	0.162	0.000	0.000	-0.162	-0.294	-0.391	-0.447	-0.465
$v2$	0.000	0.229	0.440	0.612	0.727	0.768	0.768	0.727	0.612	0.440	0.229	-0.000

Aan de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is nu te ontleen: $n_z^* = \frac{1,768}{0,768} = 2,30$

Met de ontwikkelde formule (5.50) wordt dit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_z^*} &= \frac{(0,73 \times 2,00)^2}{4,867^2 - 0,87 \times 2,00 \times 0,750 \times 4,737} + \frac{1,50}{4,737} = \frac{2,13}{23,69 - 6,18} + 0,32 = \\ &= 0,122 + 0,317 = 0,438 = \frac{1}{2,28} \end{aligned}$$

Het verschil tussen 2,30 en 2,28 is minder dan 1 %.

B5.2 Uitkraging

Evenals bij staven op twee steunpunten is voor de berekening van n_z^* dezelfde formule van toepassing, maar omdat bij uitkragingen bij de gebruikelijke belastingen het moment \bar{M}_{y1} een negatief teken heeft moet hier (om dezelfde gunstige respectievelijk ongunstige effecten van de excentriciteit correct in rekening te kunnen brengen) de absolute waarde worden ingevuld:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 |\bar{M}_{y1}| e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}}$$

De uitwerking in een spreadsheet is geheel overeenkomstig de methode toegepast bij de staaf op twee steunpunten, met de volgende kleine verschillen:

- de numerieke integratie van de torsiemomenten M_t start bij het staafeinde, $x = L$,
- idem van de torsie ϕ en de eerste afgeleide van de uitwijking v' starten bij $x = 0$.

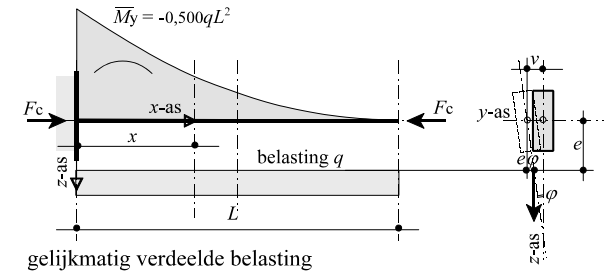
B5.2.1 Uitkraging, belast door een constant moment en een axiale drukkracht

Dit belastinggeval is eenvoudig analytisch op te lossen en behoeft daarom geen nadere uitwerking.

B5.2.2 Uitkraging, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting en een axiale drukkracht

Voor de in Hoofdstuk 5 voorkomende belastinggevallen volgen nu de resultaten van de laatste iteratie. Er is steeds uitgegaan van de volgende gegevens:

L	1,000	\bar{M}_{y1}	-1,000
EI_z	1,000	q_z	2,000
GI_t	1,000	e/L	variabel
F_{Ez}	2,467	e	variabel
M_{kr}	1,571	F_c	variabel



gelijkmatig verdeelde belasting

figuur 5.25 copie

a. Centrische belasting: $e = 0$ en $F_c = 0$

De resultaten van de laatste berekening (iteratie 20) zijn:

x/L	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
v0	0.000	0.002	0.013	0.042	0.097	0.182	0.297	0.442	0.613	0.802	1.000
v2	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.006	0.009	0.013	0.016	0.020	0.024
v	0.000	0.002	0.014	0.044	0.101	0.188	0.307	0.455	0.629	0.822	1.024
v0''	0.000	0.971	1.847	2.542	2.988	3.142	2.988	2.542	1.847	0.971	0.000
v2''	0.000	0.048	0.071	0.074	0.064	0.048	0.032	0.019	0.008	0.002	-0.000
v''	0.000	1.019	1.917	2.615	3.052	3.190	3.020	2.560	1.855	0.973	0.000
My	-1.000	-0.810	-0.640	-0.490	-0.360	-0.250	-0.160	-0.090	-0.040	-0.010	-0.000
Mt'qv	-0.000	-0.825	-1.227	-1.282	-1.099	-0.798	-0.483	-0.230	-0.074	-0.010	-0.000
Mt'qe	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Mt	0.609	0.565	0.460	0.333	0.213	0.118	0.054	0.019	0.004	0.000	0.000
phi'	0.609	0.565	0.460	0.333	0.213	0.118	0.054	0.019	0.004	0.000	0.000
phi	0.000	0.059	0.111	0.150	0.178	0.194	0.202	0.206	0.207	0.207	0.207
Mz	-0.000	-0.048	-0.071	-0.074	-0.064	-0.048	-0.032	-0.019	-0.008	-0.002	0.000
v2''	0.000	0.048	0.071	0.074	0.064	0.048	0.032	0.019	0.008	0.002	-0.000
v2'	0.000	0.003	0.009	0.016	0.023	0.029	0.033	0.035	0.036	0.037	0.037
v2	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.006	0.009	0.013	0.016	0.020	0.024

A

an de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is nu te ontlennen: $n_z^* = \frac{1,024}{0,024} = 42,97$

Dit ingevuld in de formule voor n_z^*

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}}$$

leidt tot:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{19,97} = \frac{(k_1 \times 1)^2}{1,571^2 + 0} + \frac{0}{2,467}$$

waaruit volgt:

$$k_1 = \sqrt{\frac{1,571^2}{42,97}} = 0,240$$

Eigenwaarde uiterste grenssituatie

De zogenoemde 'eigenwaarde' van het stabiliteitssysteem, waarbij n_z^* nadert tot 1, wordt gevonden door in de spreadsheet de belasting verder op te voeren tot een waarde bereikt wordt van: $n_z^* = 1,0005$. Hierbij wordt gevonden een kritische belasting $\bar{M}_{y1} = 6,44$, waaruit dan volgt:

$$k_1 = \frac{1}{6,44} \sqrt{\frac{1,571^2}{1,0004}} = 0,244$$

Dit komt geheel overeen met de in de literatuur gevonden kritische belasting, waarvoor o.a. Timoshenko [6b], blz. 261 formule (6-25), geeft:

$$(qL)_{kr} = \frac{12,85 \sqrt{EI_z GI_t}}{L^2}$$

of: $\frac{qL^2}{2} = \frac{12,85 \cdot 2}{2\pi} \left(\frac{\pi \sqrt{EI_z GI_t}}{2L} \right) = 4,09 M_{kip}$ waaruit eveneens volgt:

$$k_1 = \frac{1}{4,09} = 0,244$$

Kleine belasting

Een variant met een kleine belasting met bijvoorbeeld $\bar{M}_{y1} = 0,50$ geeft als resultaat:

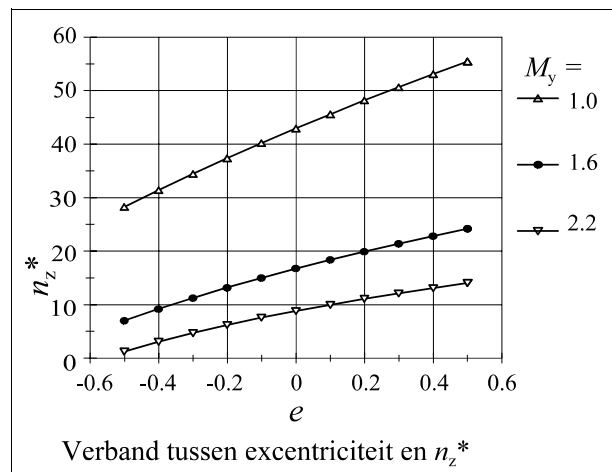
$$n_z^* = 172 \text{ waaruit volgt: } k_1 = \frac{1}{0,5} \sqrt{\frac{1,571^2}{172}} = 0,240$$

Als praktische waarde kan nu worden aanbevolen:

$$k_1 = 0,24$$

b. Excentrische belasting: $e \neq 0$ en $F_c = 0$

Evenals bij de staaf op twee steunpunten zijn voor een aantal van grote en kleine \bar{M}_{y1} en grote en kleine e zijn de uitkomsten van n_z^* berekend. Het (nagenoeg) lineaire verband tussen e en n_z^* is weergegeven in figuur B5.10.



figuur B5.10

Te zien is dat het verband tussen e en n_z^* nagenoeg lineair is en zeer nauwkeurig kan worden benaderd met:

$$\begin{aligned} n_z^* &= 42,5 + 27 e & \text{voor: } \bar{M}_{y1} &= -1,0 \\ n_z^* &= 16,5 + 17 e & \text{voor: } \bar{M}_{y1} &= -1,6 \\ n_z^* &= 8,5 + 12 e & \text{voor: } \bar{M}_{y1} &= -2,2 \end{aligned}$$

Dit stemt overeen met de reciproque vorm van de eerder ontwikkelde formule (5.78) zonder axiaalkracht:

$$n_z^* = \frac{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}}{(k_1 \bar{M}_{y1})^2} = \left(\frac{M_{kr}}{k_1 \bar{M}_{y1}} \right)^2 + \frac{k_2 e F_{Ez}}{k_1^2 \bar{M}_{y1}}$$

Voor de hiervoor ingevoerde waarden van \bar{M}_{y1} (en $F_{Ez} = 2,467$) betekent dit:

$$\left(\frac{1,571}{k_1 \times 1,0}\right)^2 = 42,5, \quad \left(\frac{1,571}{k_1 \times 1,6}\right)^2 = 16,5 \quad \text{en} \quad \left(\frac{1,571}{k_1 \times 2,2}\right)^2 = 8,5, \quad \text{respectievelijk:}$$

$$\frac{2,467k_2}{k_1^2 \times 1,0} = 27, \quad \frac{2,467k_2}{k_1^2 \times 1,6} = 17 \quad \text{en} \quad \frac{2,467k_2}{k_1^2 \times 2,2} = 12 \quad \frac{9,87k_2}{k_1^2 \times 1,6} = 6,48,$$

$$\text{waaruit volgt: } k_1 = \frac{1,571}{1,0\sqrt{42,5}} = \frac{1,571}{1,6\sqrt{16,5}} = \frac{1,571}{2,2\sqrt{8,5}} = 0,243, \quad \text{respectievelijk:}$$

$$k_2 = \frac{0,243^2 \cdot 1,0 \cdot 27}{2,467} = \frac{0,243^2 \cdot 1,6 \cdot 17}{2,467} = \frac{0,243^2 \cdot 2,2 \cdot 12}{2,467} = 0,643$$

Voor toepassing in formule (5.78) kan worden aanbevolen:

$$\boxed{k_1 = 0,24} \quad \text{en} \quad \boxed{k_2 = 0,65}$$

c. Excentrische belasting: $e \neq 0$ en $F_c \neq 0$

Naarmate de axiale kracht groter wordt zal de uitbuigingslijn onder invloed daarvan steeds dichter een sinuslijn benaderen. Evenals bij het geval met gelijkmatig verdeelde belasting is de bijdrage van F_c aan de berekening van $1/n_z^*$ nagenoeg evenredig met de grootte van F_c en onafhankelijk van de grootte van het moment en van de het aangrijpingspunt van de dwarsbelasting.

Voor een gelijkmatig verdeelde belasting op een uitkraging is de term n_z^* te berekenen met:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,24\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,65|\bar{M}_{y1}|eF_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad \text{zie (5.78)}$$

Hier volgt de tabel met de laatste iteratie van het rekenvoorbeeld uit Hoofdstuk 5.2.2:

x/L	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
v0	0.000	0.002	0.013	0.042	0.097	0.182	0.297	0.442	0.613	0.802	1.000
v2	0.000	0.014	0.057	0.130	0.231	0.358	0.508	0.677	0.861	1.054	1.252
v	0.000	0.016	0.070	0.173	0.328	0.540	0.806	1.120	1.474	1.856	2.252
v0''	0.000	0.300	0.570	0.784	0.922	0.970	0.922	0.784	0.570	0.300	0.000
v2''	0.845	0.906	0.915	0.879	0.807	0.708	0.587	0.451	0.304	0.152	-0.000
v''	0.845	1.206	1.485	1.663	1.730	1.678	1.509	1.235	0.874	0.451	0.000

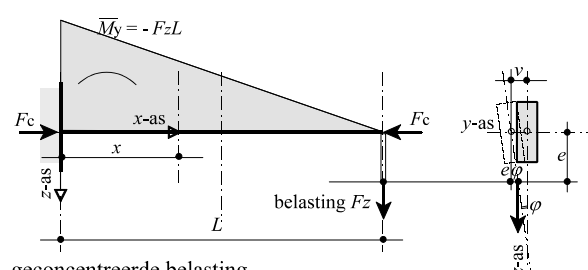
My	-2.000	-1.620	-1.280	-0.980	-0.720	-0.500	-0.320	-0.180	-0.080	-0.020	-0.000
Mt'qv	-1.689	-1.954	-1.901	-1.630	-1.245	-0.839	-0.483	-0.222	-0.070	-0.009	-0.000
Mt'qe	-0.000	-0.074	-0.134	-0.180	-0.212	-0.235	-0.249	-0.258	-0.263	-0.266	-0.267
Mt	2.023	1.684	1.315	0.967	0.672	0.444	0.283	0.175	0.103	0.049	0.000
phi'	1.011	0.842	0.657	0.483	0.336	0.222	0.141	0.087	0.051	0.024	0.000
phi	0.000	0.167	0.302	0.405	0.478	0.528	0.560	0.580	0.593	0.600	0.602
Mz	-3.378	-3.625	-3.660	-3.516	-3.230	-2.832	-2.349	-1.803	-1.215	-0.607	0.000
v2''	0.845	0.906	0.915	0.879	0.807	0.708	0.587	0.451	0.304	0.152	-0.000
v2'	0.000	0.158	0.323	0.485	0.637	0.773	0.890	0.984	1.052	1.093	1.106
v2	0.000	0.014	0.057	0.130	0.231	0.358	0.508	0.677	0.861	1.054	1.252

Aan de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is nu te ontleen: $n_z^* = \frac{2,252}{1,252} = 1,80$

B5.2.3 Uitkraging, belast door een geconcentreerde belasting op het eind van de staaf en een axiale drukkracht

Voor de in Hoofdstuk 5 voorkomende belastinggevallen volgen nu de resultaten van de laatste iteratie. Er is steeds uitgegaan van de volgende gegevens:

L	1,000	\bar{M}_{y1}	-1,000
EI_z	1,000	F_z	1,000
GI_t	1,000	e/L	variabel
F_{Ez}	2,467	e	variabel
M_{kr}	1,571	F_c	variabel



geconcentreerde belasting

figuur 5.32 copie

a. Centrische belasting: $e = 0$ en $F_c = 0$

De resultaten van de laatste berekening (iteratie 20) zijn:

x/L	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
v0	0.000	0.002	0.013	0.042	0.097	0.182	0.297	0.442	0.613	0.802	1.000
v2	0.000	0.000	0.001	0.004	0.009	0.015	0.024	0.034	0.045	0.058	0.070
v	0.000	0.002	0.014	0.046	0.106	0.197	0.321	0.476	0.658	0.859	1.070
v0''	0.000	0.971	1.847	2.542	2.988	3.142	2.988	2.542	1.847	0.971	0.000
v2''	0.000	0.094	0.161	0.197	0.205	0.192	0.164	0.127	0.086	0.043	-0.000
v''	0.000	1.065	2.007	2.738	3.193	3.334	3.152	2.669	1.932	1.014	0.000
My	-1.000	-0.900	-0.800	-0.700	-0.600	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	-0.000

Mt'qv	-0.000	-0.959	-1.606	-1.917	-1.916	-1.667	-1.261	-0.801	-0.386	-0.101	-0.000
Mt'qe	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Mt	1.068	1.018	0.888	0.710	0.517	0.336	0.189	0.086	0.027	0.004	-0.000
phi'	1.068	1.018	0.888	0.710	0.517	0.336	0.189	0.086	0.027	0.004	-0.000
phi	0.000	0.105	0.201	0.281	0.342	0.385	0.411	0.424	0.429	0.431	0.431
Mz	-0.000	-0.094	-0.161	-0.197	-0.205	-0.192	-0.164	-0.127	-0.086	-0.043	0.000
v2''	0.000	0.094	0.161	0.197	0.205	0.192	0.164	0.127	0.086	0.043	-0.000
v2'	0.000	0.005	0.018	0.036	0.056	0.076	0.094	0.109	0.119	0.126	0.128
v2	0.000	0.000	0.001	0.004	0.009	0.015	0.024	0.034	0.045	0.058	0.070

Aan de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is nu te ontleen: $n_z^* = \frac{1,070}{0,070} = 15,24$

Dit ingevuld in de formule voor n_z^* :

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}}$$

leidt tot:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{15,24} = \frac{(k_1 \times 1)^2}{1,571^2 + 0} + \frac{0}{2,467}$$

waaruit volgt:

$$k_1 = \sqrt{\frac{1,571^2}{15,24}} = 0,402$$

Eigenwaarde uiterste grenssituatie

De zogenoemde 'eigenwaarde' van het stabiliteitssysteem, waarbij n_z^* nadert tot 1, wordt gevonden door in de spreadsheet de belasting verder op te voeren tot een waarde bereikt wordt van: $n_z^* = 1,008$. Hierbij wordt gevonden een kritische belasting $\bar{M}_{y1} = 4,00$, waaruit dan volgt:

$$k_1 = \frac{1}{4,00} \sqrt{\frac{1,571^2}{1,008}} = 0,393$$

Dit komt geheel overeen met de in de literatuur gevonden kritische belasting, waarvoor o.a. Timoshenko [6b], blz. 261 formule (6-24), geeft:

$$F_{kr} = \frac{4,013 \sqrt{EI_z GI_t}}{L^2} \left(1 - \frac{e}{L} \sqrt{\frac{EI_z}{GI_t}} \right) \text{ of: bij } e = 0$$

$$F_z L = \frac{4,013 \cdot 2}{\pi} \left(\frac{\pi \sqrt{EI_z GI_t}}{2L} \right) = 2,55 M_{kip} \quad \text{waaruit volgt: } k_1 = \frac{1}{2,55} = 0,391$$

Kleine belasting

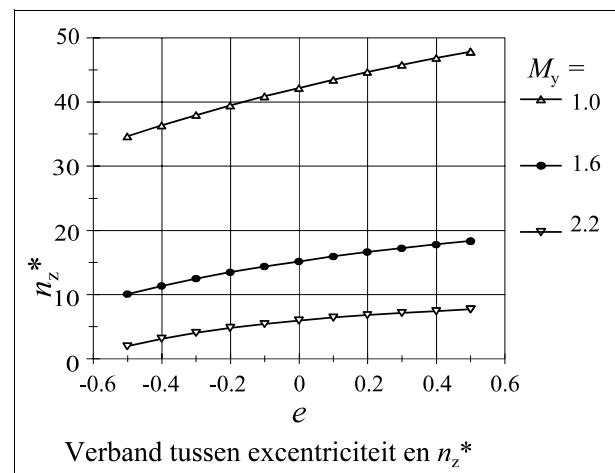
Een kleine belasting met bijvoorbeeld $\bar{M}_{y1} = 0,50$ leidt tot: $n_z^* = \frac{1,0167}{0,0167} = 60,85$

waaruit volgt:

$$k_1 = \frac{1}{0,5} \sqrt{\frac{1,571^2}{60,85}} = 0,403$$

b. Excentrische belasting: $e \neq 0$ en $F_c = 0$

Even bij het geval met geconcentreerde belasting zijn voor een aantal combinaties van \bar{M}_{y1} en e de uitkomsten van n_z^* berekend. Het nagenoeg) lineaire verband tussen e en n_z^* is weergegeven in figuur B5.11.



figuur B5.11

Te zien is dat het verband tussen e en n_z^* (behalve bij grote negatieve excentriciteit en zeer kleine n_z^*) nagenoeg lineair is en voldoende nauwkeurig kan worden benaderd met:

$$\begin{aligned} n_z^* &= 41,7 + 13 e & \text{voor: } \bar{M}_{y1} &= -0,6 \\ n_z^* &= 14,8 + 8,5 e & \text{voor: } \bar{M}_{y1} &= -1,0 \\ n_z^* &= 5,5 + 5,5 e & \text{voor: } \bar{M}_{y1} &= -1,6 \end{aligned}$$

Dit stemt weer overeen met de reciproque vorm van de eerder ontwikkelde formule zonder axiaalkracht:

$$n_z^* = \frac{M_{kr}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}}{(k_1 \bar{M}_{y1})^2} = \left(\frac{M_{kr}}{k_1 \bar{M}_{y1}} \right)^2 + \frac{k_2 e F_{Ez}}{k_1^2 \bar{M}_{y1}}$$

Voor de hiervoor ingevoerde waarden van \bar{M}_{y1} (en $F_{Ez} = 2,467$) betekent dit:

$$\left(\frac{1,571}{k_1 \times 0,6} \right)^2 = 41,7, \quad \left(\frac{1,571}{k_1 \times 1,0} \right)^2 = 14,8 \quad \text{en} \quad \left(\frac{1,571}{k_1 \times 1,6} \right)^2 = 5,5, \quad \text{respectievelijk:}$$

$$\frac{2,467 k_2}{k_1^2 \times 0,6} = 13, \quad \frac{2,467 k_2}{k_1^2 \times 1,0} = 8,5 \quad \text{en} \quad \frac{2,467 k_2}{k_1^2 \times 1,6} = 5,5$$

$$\text{waaruit volgt: } k_1 = \frac{1,571}{0,6 \sqrt{41,7}} = \frac{1,571}{1,0 \sqrt{14,8}} = \frac{1,571}{1,6 \sqrt{5,5}} = 0,41, \quad \text{respectievelijk:}$$

$$k_2 = \frac{0,41^2 \cdot 0,6 \cdot 13}{2,467} = \frac{0,41^2 \cdot 1,0 \cdot 8,5}{2,467} = \frac{0,41^2 \cdot 1,6 \cdot 5,5}{2,467} = 0,57$$

Voor toepassing in formule (5.91) kan dus worden aanbevolen:

$$\boxed{k_1 = 0,41} \quad \text{en} \quad \boxed{k_2 = 0,57}$$

c. Excentrische belasting: $e \neq 0$ en $F_c \neq 0$

Naarmate de axiale kracht groter wordt zal de uitbuigingslijn onder invloed daarvan steeds dichter een sinuslijn benaderen. Evenals bij het geval met gelijkmatig verdeelde belasting is de bijdrage van F_c aan de berekening van $1/n_z^*$ nagenoeg evenredig met de grootte van F_c en onafhankelijk is van de grootte van het moment en van de het aangrijpingspunt van de dwarsbelasting.

Voor een geconcentreerde belasting aan het staafeinde is de factor n_z^* dus te berekenen met:

$$\boxed{\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,41 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 - 0,57 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}}} \quad \text{zie (5.91)}$$

Hier volgt nog de tabel met de laatste iteratie van het voorbeeld uit Hoofdstuk 5.2.3 met dezelfde gegevens:

x/L	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
v0	0.000	0.002	0.013	0.042	0.097	0.182	0.297	0.442	0.613	0.802	1.000
v2	0.000	0.041	0.165	0.372	0.656	1.013	1.434	1.909	2.426	2.971	3.530
v	0.000	0.043	0.178	0.414	0.754	1.195	1.732	2.352	3.039	3.772	4.530
v0''	0.000	0.108	0.205	0.282	0.332	0.349	0.332	0.282	0.205	0.108	0.000
v2''	0.906	0.926	0.915	0.875	0.807	0.714	0.599	0.465	0.318	0.161	-0.000
v''	0.906	1.034	1.120	1.158	1.139	1.063	0.931	0.748	0.523	0.269	0.000
My	0.900	0.810	0.720	0.630	0.540	0.450	0.360	0.270	0.180	0.090	0.000
Mt'qv	0.815	0.837	0.807	0.729	0.615	0.478	0.335	0.202	0.094	0.024	0.000
Mt'qe	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Mt	-1.289	-1.040	-0.793	-0.562	-0.359	-0.195	-0.073	0.007	0.051	0.068	0.071
phi'	-0.645	-0.520	-0.396	-0.281	-0.180	-0.097	-0.037	0.004	0.025	0.034	0.035
phi	0.000	-0.175	-0.312	-0.414	-0.482	-0.523	-0.543	-0.548	-0.543	-0.534	-0.523
Mz	-4.530	-4.629	-4.577	-4.377	-4.037	-3.571	-2.994	-2.326	-1.589	-0.806	0.000
v2''	0.906	0.926	0.915	0.875	0.807	0.714	0.599	0.465	0.318	0.161	-0.000
v2'	0.000	0.275	0.552	0.821	1.074	1.303	1.500	1.660	1.778	1.850	1.874
v2	0.000	0.041	0.165	0.372	0.656	1.013	1.434	1.909	2.426	2.971	3.530

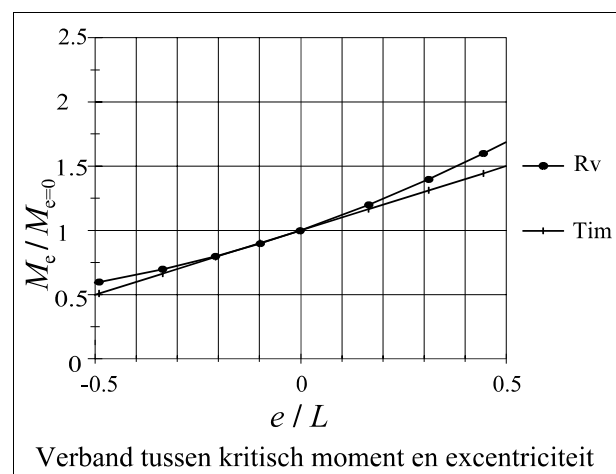
Aan de verhouding tussen \bar{v} en \bar{v}_2 is nu te ontleen: $n_z^* = \frac{4,530}{3,530} = 1,28$

Evenals bij de staaf op twee steunpunten zijn ook hier de eigenwaarden van de belasting bij de excentriciteiten : $-0,5 < e/L < +0,5$ ten opzichte van de eigenwaarde bij $e = 0$ berekend:

- Rv: berekend met de hiervoor ontwikkelde formule met $k_1 = 0,41$ en $k_2 = 0,57$
- Tim: berekend met de benaderingsformule van Timoshenko [6b], blz. 261 formule (6-24):

$$M_{cr} = \frac{M_{kip}}{0,391} \left(1 - \frac{e}{L} \sqrt{\frac{EI_z}{GI_t}} \right)$$

De resultaten zijn weergegeven in figuur B5.12:



figuur B5.12

Evenals bij een staaf op twee steunpunten met een geconcentreerde last in het midden zijn ook hier de uitkomsten volgens Timoshenko bij kleine excentriciteiten nauwkeurig en bij groter wordende excentriciteiten aan de veilige kant.

Bij vergelijking met figuur B5.9 valt op dat de grootte van de excentriciteit bij een uitkraging duidelijk van minder invloed is dan bij een staaf op twee steunpunten.

Bijlage

6

Uitwerking
analytische methode

De berekening van n_z^* is gebaseerd op de differentiaalvergelijkingen (6.0):

buiging om de z-as	$EI_z v_2'' + F_c v + M_{y1} \varphi = 0$	zie (6.01)
rotatie om de x-as	$M_{y1} v' + M_{x2} - GI_t \varphi' = 0$	

In slechts enkele gevallen kan dit zuiver wiskundig-analytisch met sinus- en cosinuslijnen worden opgelost, zoals bij een axiaalkracht en een constant moment. In andere gevallen zijn er soms numerieke oplossingsmethoden.

Een voorbeeld daarvan wordt aangetroffen bij Timoshenko [6b] bij belasting zonder een axiale drukkracht en met een gelijkmatig verdeelde belasting, die aangrijpt in het zwaartepunt van de doorsnede.

Door de tweede vergelijking van (6.01) te differentiëren ontstaat met behulp van de eerder ontwikkelde formules (5.18) tot en met (5.22):

$$M_{y1} v'' + qe\varphi - GI_t \varphi'' = 0 \quad \text{of:} \quad v'' = \frac{-qe\varphi + GI_t \varphi''}{M_{y1}} = n_z^* v''_2 \quad (\text{B6.01})$$

Dit kan worden gesubstitueerd in de eerste vergelijking van (6.01):

$$\frac{EI_z (-qe\varphi + GI_t \varphi'')}{n_z^* M_{y1}} + F_c v + M_{y1} \varphi = 0 \quad (\text{B6.02})$$

Als er geen axiale drukkracht optreedt (dus: $F_c = 0$) resteert er een functie in φ en φ'' samen met een parabool (M_{y1}):

$$M_{y1}^2 n_z^* \varphi + EI_z (-qe\varphi + GI_t \varphi'') = 0 \quad (\text{B6.03})$$

Hiervan is inderdaad een reeks te maken, die zelfs nog kan worden uitgebreid met een term: $-EI_w \varphi''''$ om (in voorkomende gevallen) ook de verhinderde welving te verdisconteren;

$$(M_{y1}^2 n_z^* - EI_z qe) \varphi + EI_z (GI_t \varphi'' - EI_w \varphi''') = 0 \quad (\text{B6.04})$$

Dit is op te lossen door φ te beschouwen als een machtreeks van x :

$$\begin{aligned}\varphi &= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \dots \\ \varphi'' &= 2c + 6dx + 12ex^2 + \dots \quad \text{enz.}\end{aligned}\tag{B6.05}$$

Het principe van uitwerking hiervan is te vinden in Bijlage B1-[6a].

De door Timoshenko [6a] en [6b] gepresenteerde tabellen voor enkele belastinggevallen zijn berekend met behulp van dergelijke reeksontwikkelingen maar de mogelijkheden daarvan zijn toch (te) beperkt.

Indien er wel een axiale belasting aanwezig is kan (B6.02) twee maal worden gedifferentieerd, met als resultaat een functie v'' van $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi'''$ (en eventueel nog φ''''). Substitutie van v'' in (B6.01) levert uiteindelijk een zeer gecompliceerde functie met uitsluitend termen in φ (en afgeleiden) en diverse machten van x , waarvan tenslotte een reeks is te maken.

Al met al een uiterst omvangrijke bezigheid.

De mechanica biedt echter efficiëntere berekeningsmethoden, zoals het beproefde principe van vormveranderingsarbeid, in combinatie met een spreadsheetprogramma. Vanwege de gunstige verhouding tussen toepassingsmogelijkheden, eenvoud en nauwkeurigheid wordt hiermee verder gewerkt.

B6.1 Staaf op twee steunpunten

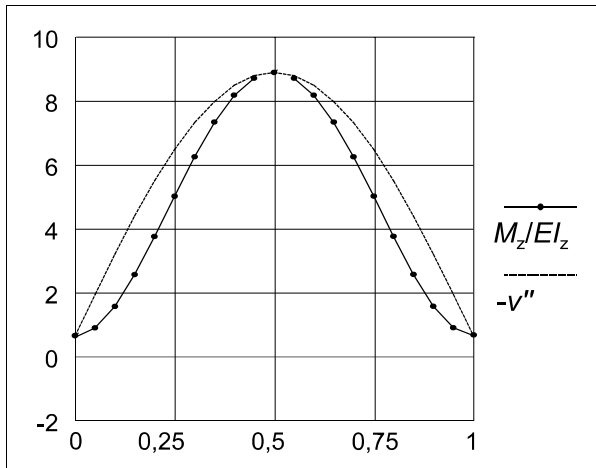
B6.1.1 Belast door een constant momenten en een axiale drukkracht

Dit belastinggeval kan zonder hulpmiddelen rechtstreeks wiskundig-analytisch worden opgelost en behoeft hier dus niet verder te worden toegelicht.

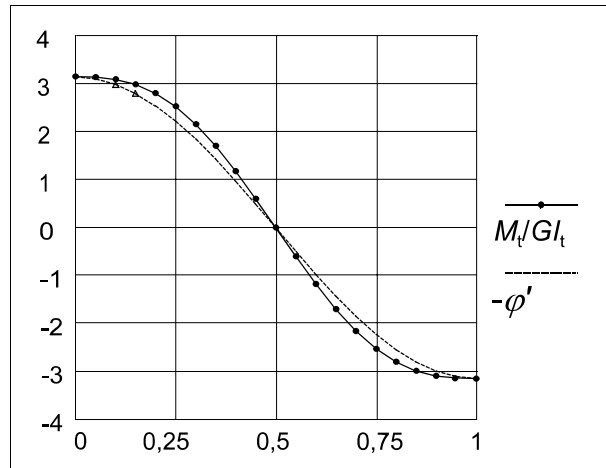
B6.1.2 Staaf op twee steunpunten, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting en een axiale drukkracht

De voorlopige uitkomst volgens Hoofdstuk 6 formule (6.22) is reeds zeer nauwkeurig en stemt nagenoeg overeen met de resultaten van het stappenplan in Hoofdstuk 5.1.2 volgens formule (5.37) en de uitwerkingen in bijlage 5.1.2.

Het verloop van de bijbehorende lijnen met: v_2'' en $-M_{z2}/EI_{z2}$, respectievelijk: φ en M_{φ}/GI_{φ} is weergegeven in de figuren B6.1, respectievelijk B6.2:



figuur B6.1

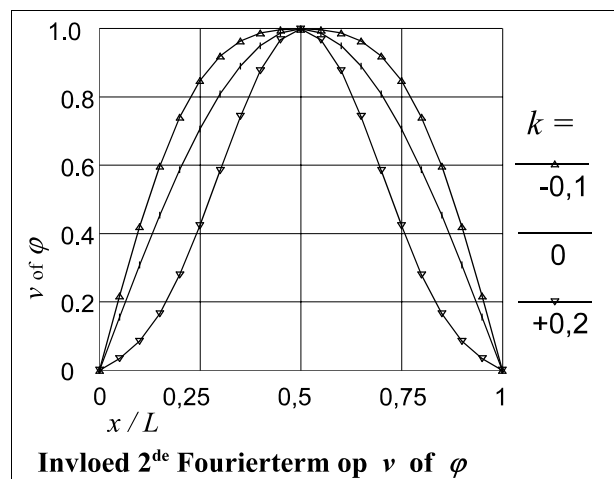


figuur B6.2

Te zien is dat de verhoudingen tussen beide M -lijnen en bijbehorende vervormingslijnen weliswaar dezelfde tendensen vertonen maar wellicht toch nog verbeterd kunnen worden.

Nadere precisering

Vergroting van de nauwkeurigheid is mogelijk door aanpassing van de vorm van v en/of φ door toevoeging van een tweede Fourierterm met: $\sin(3\pi x/L)$ met dezelfde randvoorwaarden bij begin, midden en eind van de staaf. Door de keuze van de constanten k_v , resp. k_φ zijn hierdoor 'scherpere', klokvormige of 'bollere' lijnen mogelijk, optimaal aangepast aan het werkelijke verloop. Zie figuur B6.3.



figuur B6.3

De vervormingen en hun afgeleiden zijn dan:

$$\begin{aligned}
 v &= \bar{v} \left\{ (1 - k_v) \sin \frac{\pi x}{L} - k_v \sin \frac{3\pi x}{L} \right\} & \varphi &= \bar{\varphi} \left\{ (1 - k_\varphi) \sin \frac{\pi x}{L} - k_\varphi \sin \frac{3\pi x}{L} \right\} \\
 v' &= \bar{v} \frac{\pi}{L} \left\{ (1 - k_v) \cos \frac{\pi x}{L} - 3k_v \cos \frac{3\pi x}{L} \right\} & \varphi' &= \bar{\varphi} \frac{\pi}{L} \left\{ (1 - k_\varphi) \cos \frac{\pi x}{L} - 3k_\varphi \cos \frac{3\pi x}{L} \right\} \\
 v'' &= -\bar{v} \frac{\pi^2}{L^2} \left\{ (1 - k_v) \sin \frac{\pi x}{L} - 9k_v \sin \frac{3\pi x}{L} \right\} & & \cdot
 \end{aligned}$$

De totale vormveranderingsarbeid neemt toe of af naarmate de constanten k variëren.

Onderzocht is bij welke waarden hiervan de kritische belasting minimaal is.

Bij: $k_v = k_\varphi = 0,00$ wordt de bijbehorende kritische belasting gesteld op: $\bar{M}_{y1} = 1,000$.

Het volgende overzicht toont het resultaat:

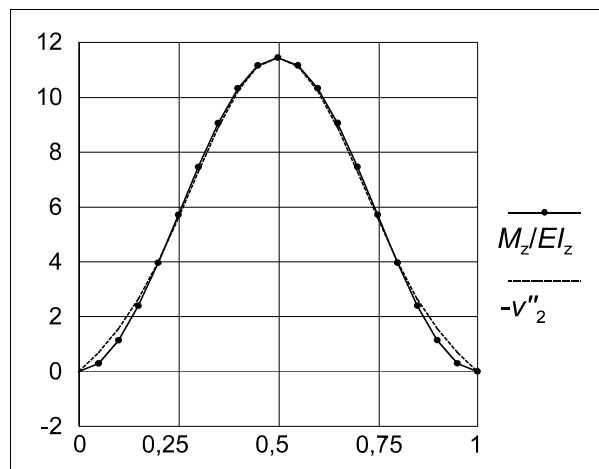
$k_\varphi =$ $k_v =$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.00	1.000	0.999	0.998	0.999	1.000	1.003
0.01	0.988	0.986	0.985	0.985	0.986	0.988
0.02	0.985	0.982	0.981	0.980	0.980	0.981
0.03	0.990	0.987	0.984	0.983	0.982	0.983
0.04	1.002	0.998	0.995	0.993	0.992	0.992

De kleinst mogelijke kritische waarde van: $\bar{M}_{y1} = 0,980$ wordt gevonden bij:

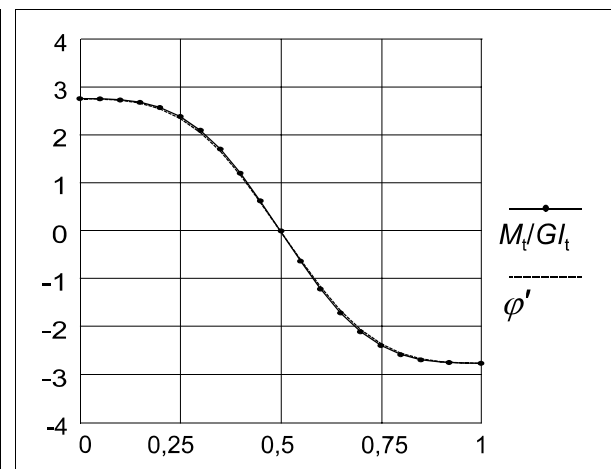
$k_v = 0,02$ en $k_\varphi = 0,03 \approx 0,04$ (dus met een tweede Fourierterm groot ca. 3 % van de eerste)

Hierbij behoort in formule (6.22) een waarde: $k_1 = 0,886$.

De bijbehorende vormen van $-v''_2$ met de gelijkvormige M_z/EI_z respectievelijk φ met M_t/GI_t zijn afgebeeld in de figuren B6.4 en B5.5.



figuur B6.4



figuur B6.5

Duidelijk is dat nu door toevoeging van een 2^{de} Fourierterm er een fraaie overeenstemming bereikt wordt, met slechts een kleine afwijking nabij de staafopleggingen in figuur 6B.4.

De uitkomst van de arbeidsvergelijkingen wordt nu: $A_u - A_i = 0$

	A uitwendig	$-A$ inwendig	$= 0$
buiging:	$2,12 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{\varphi} \bar{v}_2 + 2,38 \frac{F_c}{L} \bar{v} \bar{v}_2$	$- 24,18 \frac{EI_z}{L^3} \bar{v}_2^2$	$= 0$
torsie:	$2,12 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \bar{v} \bar{\varphi} - 1,88 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} e \bar{\varphi}^2$	$- 2,34 \frac{GI_t}{L} \bar{\varphi}^2$	

(B6.06)

Op dezelfde wijze als hiervoor is de som van de totale arbeid te schrijven in matrixnotatie:

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} -\frac{24,18EI_z}{L^3} \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} + \frac{2,38F_c}{L} & 2,12 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \\ 2,12 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} & -1,88 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} e - \frac{2,34GI_t}{L} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \bar{v} \\ \bar{\varphi} \end{matrix} \right\} = 0 \quad (B6.07)$$

Bij \bar{v} , \bar{v}_2 en $\bar{\varphi}$ alle ongelijk nul wordt aan de vergelijking voldaan als de determinant van de matrix nul is.

Na delen door: $\frac{24,18}{\pi^2} \cdot 2,34 = 2,45 \cdot 2,34 = 2,39^2$ leidt dit tot:

$$\left(\frac{\pi^2 EI_z}{L^2 n_z^*} - \frac{2,38}{2,45} F_c \right) \left(\frac{1,88}{2,34} \bar{M}_{y1} e + GI_t \right) - \left(\frac{2,12}{2,39} \bar{M}_{y1} \right)^2 = 0 \quad (B6.08)$$

Met: $F_{Ez} GI_t = M_{kr}^2$ is dan het uiteindelijke resultaat:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,89 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,80 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{0,97 F_c}{F_{Ez}} \quad (B6.09)$$

De waarden van de reductiefactoren geven hier afwijkingen van slechts enkele procenten ten opzichte van de resultaten van het stappenplan zoals berekend in Hoofdstuk 5 formule (5.37).

De factor: $k_1 = 0,89$ is nu in overeenstemming met de resultaten bij grote belastingen waarbij n_z^* nadert tot 1 (zie ook bijlage B5.1.2).

N.B. Bij nadere beschouwing valt op dat er grote overeenstemming is bij de ϕ -lijnen, maar dat er bij de v_2'' -lijnen nabij de opleggingen nog kleine verschillen optreden. Toevoegen van een volgende Fourierterm: met $\sin(5\pi x/L)$ zou deze verschillen nagenoeg kunnen opheffen, maar de te bereiken nauwkeurigheid weegt niet op tegen de extra inspanning om dit in te voeren.

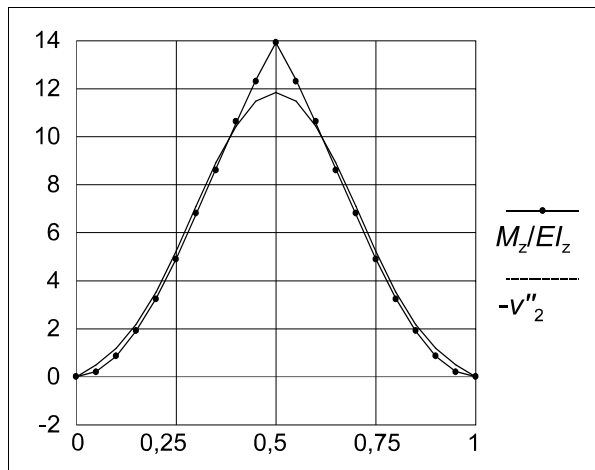
De spreadsheet die in het stappenplan wordt gebruik vindt overigens, na de nodige iteraties, zodanige vormen dat de M_z/EI_z -lijn zeer nauwkeurig samenvalt met de v_2'' -lijn.

Gezien de grotere nauwkeurigheid van het stappenplan is het dus verantwoord om de aldaar gevonden formules als definitief te beschouwen.

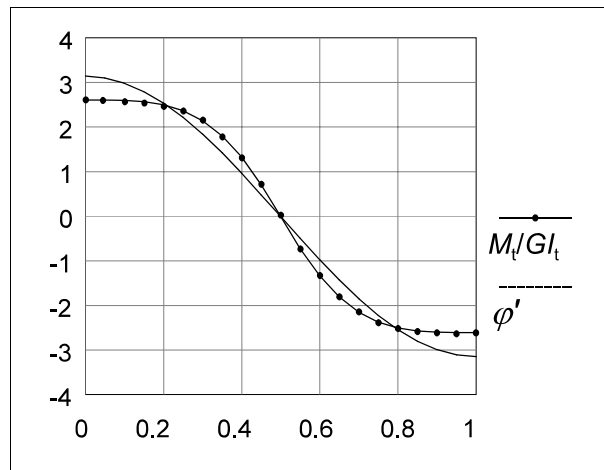
B6.1.3 Staaf op twee steunpunten, belast door een geconcentreerde last in het midden van de staaf en een axiale drukkracht

De voorlopige uitkomst volgens hoofdstuk 6 formule (6.28) wijkt naar verhouding iets meer af van de resultaten van het stappenplan in hoofdstuk 5.2.2 dan het geval is bij de gelijkmatig verdeelde belasting.

Dat is ook te zien in het verloop van de lijnen met: $-v_2''$ en M_z/EI_z respectievelijk: ϕ en M_t/GI_t , die zijn weergegeven in de figuren B6.6 respectievelijk B6.7:



figuur B6.6



figuur B6.7

Te zien is dat de verhoudingen tussen beide M -lijnen en bijbehorende vervormingslijnen weliswaar dezelfde tendensen vertonen maar grotere afwijkingen vertonen dan bij de belasting door een q -last en dus zeker nog verbeterd kunnen worden

Nadere precisering

Ook hier kan de nauwkeurigheid worden vergroot door aanpassing van de vormen van v en φ door toevoeging van een tweede Fourierterm.

Bij excentrisch aangrijpende belasting maakt de M_t -lijn in het midden van de staaf een sprong van: $+0,5F_z e \varphi$ naar $-0,5F_z e \varphi$. Hierdoor vertoont de torsielijn (φ -lijn) eveneens een sprong en de rotatielijn (φ -lijn) een knik. In de hier toegepaste schematisering wordt dit acceptabel geacht. In een werkelijke situatie is de veiligheid altijd groter omdat deze discontinuïteiten worden geëlimineerd door de weerstand tegen welving van de doorsnede nabij het midden van de staaf.

Op een vergelijkbare wijze als bij de gelijkmatig verdeelde belasting wordt weer onderzocht bij welke combinaties van tweede Fouriertermen k_v en k_φ de kritische belasting minimaal is. Het volgende overzicht toont het resultaat:

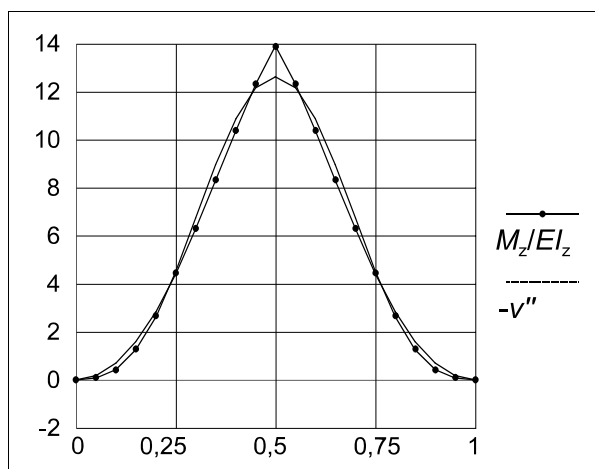
$k_\varphi =$ \ / $k_v =$	0.00	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.00	1.000	0.996	0.996	0.997	1.000	1.004
0.02	0.965	0.958	0.957	0.957	0.958	0.961
0.03	0.961	0.951	0.950	0.950	0.950	0.952
0.04	0.963	0.953	0.951	0.950	0.950	0.951
0.05	1.973	0.961	0.928	0.957	0.957	0.958

De kleinst mogelijke kritische waarde van: $\bar{M}_{y1} = 0,950$ wordt gevonden bij:

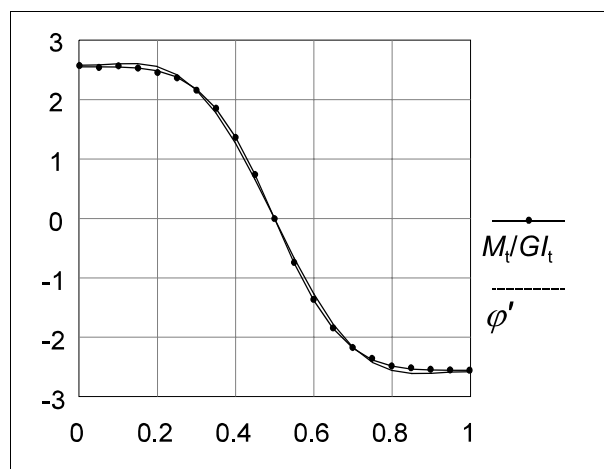
$k_v = 0,035$ en: $k_\varphi = 0,05$ (dus met een tweede Fourierterm groot ca. 4 % van de eerste)

Hierbij behoort in formule (6.28) een waarde: $k_1 = 0,740$ en: $k_1 = 0,866$.

De bijbehorende lijnen van $-v''_2$ met de gelijkvormige M_z/EI_z respectievelijk φ met M_t/GI_t zijn afgebeeld in de figuren B6.8 en B6.9.



figuur B6.8



figuur B6.9

De 'scherpe' punt in de M_z -lijn in figuur B6.8 wordt redelijk dicht benaderd door de 'top' van de 2^{de} Fourierterm en in figuur B6.9 zijn de lijnen van φ en M_t/GI_t zelfs nagenoeg geheel gelijkvormig.

De vergelijking van de vormveranderingsarbeid wordt nu:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi} \end{array} \right\} \left[\begin{array}{cc} -\frac{24,29EI_z}{L^3} \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}} + \frac{2,37F_c}{L} & 1,74 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} \\ 1,74 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} & -2,00 \frac{\bar{M}_{y1}}{L} e^{-\frac{2,31GI_t}{L}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \bar{v} \\ \bar{\varphi} \end{array} \right\} = 0 \quad (\text{B6.10})$$

Op dezelfde wijze als bij de vorige gevallen volgt hieruit als resultaat:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,74\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,87\bar{M}_{y1}eF_{Ez}} + \frac{0,96F_c}{F_{Ez}} \quad (\text{B6.11})$$

Bij een groter wordende axiale drukkracht gaat de v -lijn hoe langer hoe meer een zuivere sinuslijn benaderen, wordt de 2^{de} Fourierterm kleiner en nadert k_1 steeds dichter tot 1. Het is daarom veilig om voor dit belastinggeval n_z^* te berekenen met:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(0,74\bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + 0,87\bar{M}_{y1}eF_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (\text{B6.12})$$

Het valt op dat de verschillen tussen momenten- en vervormingslijnen groter blijven dan bij de belasting met q -last. Toevoegen van een volgende Fourierterm: met $\sin(5\pi x/L)$ zou deze verschillen wel kleiner maken, maar de te bereiken nauwkeurigheid weegt niet op tegen de extra inspanning om dit uit te voeren. Ook hier blijkt dat het in hoofdstuk 5 behandelde iteratiemethode zeer nauwkeurige uitkomsten biedt. Daarom is het verantwoord om de aldaar gevonden formules als definitief te beschouwen.

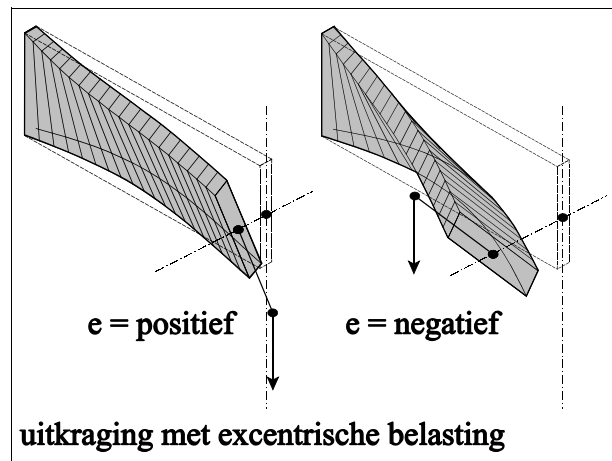
B6.2 Uitkraging

Uitkragingen zijn zeer gevoelig voor excentriciteiten. Dit wordt vooral veroorzaakt door de verhouding φ/v die over de gehele staaflengte groter is dan $\bar{\varphi}/\bar{v}$ aan het staafeind, zoals uit het verloop van de φ - en v -lijnen (zie Hoofdstuk 5 figuren 5.19 en 5.20) duidelijk is te concluderen.

Dit in tegenstelling tot staven op twee steunpunten, waar beide lijnen door een (nagenoeg enkelvoudige) sinuslijn worden benaderd, waardoor die verhoudingen over de gehele lengte van de staaf nagenoeg constant zijn.

Bij excentrische belastingen wijkt het aangrijpingspunt van de belasting horizontaal uit over een afstand: $v_e = e\varphi$ waardoor, vooral bij grote positieve waarden van e merkwaardige torsiemomenten kunnen ontstaan.

Bij wringslappe doorsneden (en dus grote rotaties) is het dan zelfs denkbaar dat (over een gedeelte van de lengte) de aangrijpingspunten van de belasting naar de andere zijde van de uitbuiging verschuiven en daar een zeer gunstig terugdraaiend torsiemoment veroorzaken. Zie figuur B6.12.



figuur B6.10

B6.2.1 Uitkraging, belast door een constant moment en een axiale drukkracht

Dit belastinggeval kan zonder hulpmiddelen rechtstreeks wiskundig-analytisch worden opgelost en behoeft hier verder geen nadere toelichting.

B6.2.2 Uitkraging, belast door een gelijkmatig verdeelde belasting en een axiale drukkracht

Voor enkele combinaties van een drukkracht en een excentrisch aangrijpende dwarsbelasting is nagegaan welke afwijkingen ontstaan als de berekening van n_z^* wordt uitgevoerd met:

- de ontwikkelde formule:
$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2 + k_2 |\bar{M}_{y1}| e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}}$$
 zie (5.88) voor: $k_2 = 0,65$ en verschillende waarden voor de factor k_1 (geval A)

ten opzichte van:

- de (met behulp van 2^{de} Fouriertermen) zo goed mogelijk benaderde vormen van de vervormingslijnen (geval B).

Het resultaat is af te lezen in het volgende overzicht:

	F_c / F_{Fz}	excentriciteit: e / L						
		-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3
$k_1 = 0,25$	0	1,08	0,98	0,93	0,94	0,98	1,04	1,10
	0,2	1,01	0,97	0,96	0,96	0,98	1,01	1,04
	0,4	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01
$k_1 = 0,245$	0	1,12	1,02	0,97	0,97	1,01	1,09	1,14
	0,2	1,03	1,00	0,98	0,99	1,00	1,03	1,06
	0,4	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02
$k_1 = 0,24$	0	1,17	1,06	1,01	1,02	1,05	1,13	1,19
	0,2	1,06	1,02	1,01	1,01	1,03	1,06	1,09
	0,4	1,03	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04

De verzamelde getallen geven aan: de verhoudingen van de gevonden waarden van n_z^* in de gevallen A ten opzichte van B.

- N.B. 1. Cursieve getallen duiden op onveilige uitkomsten.
2. Bij een aangehouden waarde van $k_1 = 0,25$ worden kleinere waarden van n_z^* berekend dan bij $k_1 = 0,24$.
(voor $e = 0$ en $F_c = 0$ in de verhouding: $0,24^2/0,25^2 = 0,92$)
 3. Bij grotere excentriciteiten (zowel positief als negatief) zijn de uitkomsten volgens formule (5.72) altijd iets te optimistisch, dus in principe onveilig.
 4. Bij excentriciteiten: $-0,1 < e/L < +0,1$ is formule (5.72) veilig genoeg.

B6.2.3 Uitkraging, belast door een geconcentreerde dwarsbelasting en een axiale drukkracht

Bij uitkragingen is het vinden van zo correct mogelijke vervormingslijnen bij alle mogelijke belastingcombinaties veel lastigere en tijdrovender dan bij staven op twee steunpunten. Het stappenplan in Hoofdstuk 5 biedt hiervoor echter veel gemakkelijker en ook nauwkeuriger uitkomsten. Nu blijkt dat beide methoden voor alle onderzochte belastinggevallen tot uitkomsten leiden die hoogstens enkele procenten verschillen is het niet zinvol om de analytische methode uit te breiden met eventuele volgende Fouriertermen of andere verfijningen. Verdere aanvullingen op Hoofdstuk 6 zijn dan ook niet nodig.

Bijlage

7

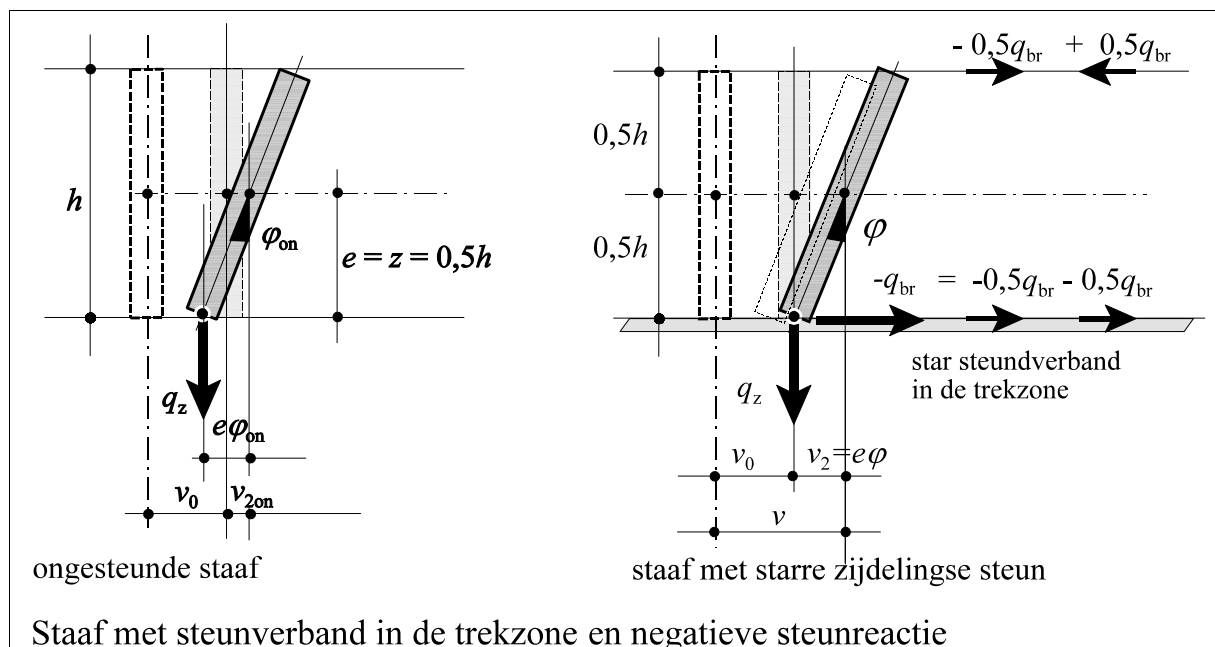
Zijdelings gesteunde staven

In Hoofdstuk 7 werd gesignaleerd dat zijdelingse steun in de trekzone een gunstige effect heeft op de stabiliteit van relatief smalle, lange staven, maar dat de 2^{de}-orde factor bij brede, korte staven (soms) wordt verkleind. Dit verschijnsel wordt nader beschouwd in B7.1.

In Hoofdstuk 7 is uitgegaan van starre zijdelingse steunverbanden. Omdat deze verbanden (uiteraard) niet oneindig stijf zijn treedt er altijd wel enige vervorming op. De consequenties hiervan worden nagegaan in B7.2.

B7.1 Negatieve invloed van het steunverband

Als bij de ongesteunde staaf een relatief kleine zijdelingse uitbuiging v_{2on} optreedt samen met een relatief grote rotatie φ_{on} kan de verplaatsing van de ongesteunde trekzijde soms kleiner worden dan v_0 . Zie figuur B7.1:



figuur B7.1

Dit kan zich voordoen bij een belastingcombinatie van:

- een klein moment M_{y1} ,
- een grote buigstijfheid EI_z en
- een kleine torsiestijfheid GI_t .

Als de staaf dan toch wordt gedwongen om bij het bevestigingspunt met het steunverband de positie v_0 te blijven innemen is daarvoor een negatieve reactiebelasting nodig.

Het gevolg daarvan is: een vergroting van v_2 en dus een verkleining van n_z^* .

Nagegaan wordt nu onder welke omstandigheden de steunreactie negatief wordt en wanneer het 'omslagpunt' optreedt.

a. *Belasting door alleen een gelijkmatig verdeelde belasting*

Uit de eerste regel van formule (7.08) is af te leiden dat de steunreactie negatief wordt als:

$$\bar{M}_{brz} = k_1 \bar{M}_{y1} \frac{2\bar{v}_2}{h} + F_c \bar{v} - F_{Ez} \bar{v}_2 < 0 \quad \text{wat, na deling door } \bar{v}_2, \text{ leidt tot:}$$

$$k_1 \bar{M}_{y1} \frac{2}{h} + F_c n_x^* - F_{Ez} < 0$$

Het grootste moment \bar{M}_{y1} waarbij dit kan optreden doet zich voor als er geen axiale drukkracht aanwezig is (dus $F_c=0$). Het 'omslagpunt' wordt dan gevonden bij:

$$\bar{M}_{y1} = \frac{F_{Ez} h}{2k_1} \tag{B7.01}$$

Bij deze belasting behoort een factor: $k_1 = 0,88$ zodat de buigspanning is:

$$\bar{\sigma}_{my1} = \frac{\bar{M}_{y1}}{W_y} = \frac{F_{Ez} h}{2 \times 0,88 W_y} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \frac{h}{1,76 \frac{I_y}{0,5h}} = 2,8 E \frac{I_z}{I_y} \frac{h^2}{L^2} \tag{B7.02}$$

In verhouding met de buigsterkte betekent dit globaal voor:

$$\text{- rechthoekige (houten) doorsneden: } \frac{\bar{\sigma}_{my1}}{f_m} = 2,8 \left(\frac{6000}{18} \hat{a} \frac{11000}{32} \right) \frac{b^2}{h^2} \frac{h^2}{L^2} \approx \left(\frac{31b}{h} \right)^2$$

$$\text{- (stalen) I-profielen: } \frac{\bar{\sigma}_{my1}}{f_m} = 2,8 \frac{210000}{235} \frac{(0,24b)^2}{(0,41h)^2} \frac{h^2}{L^2} = \left(\frac{29b}{L} \right)^2$$

Als de buigsterkte zo veel mogelijk wordt benut zal zijdelingse steun van de getrokken zijde alleen leiden tot vermindering van de 2^{de}-orde effecten bij smalle, lange staven. Het 'omslagpunt' ligt dan ongeveer bij:

$$\frac{b}{L} \approx 30 \quad (\text{B7.03})$$

Bij de veel voorkomende verhouding $h/L = 1/20$ geldt dan: $b/h \approx 0,67$.

Een steunverband in de trekzone is dus gunstig voor staven van:

- hout: vrijwel alle praktisch voorkomende rechthoekige doorsneden (zie het voorgaande voorbeeld met variant),
- staal: alle profielen: IPE en HE-450 (A en B) en hoger.

Controle 2^{de}-orde term

In de grenssituatie, waarbij met (B7.01): $k_1 \bar{M}_{y1} = \frac{F_{Ez} h}{2}$ en: $k_2 e \approx 0,5 k_1 h$, geeft de berekening van n_z^* , voor het geval de staaf ongesteund zou zijn, volgens (5.37):

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{F_{Ez} (GI_t + k_2 \bar{M}_{y1} e)} = \frac{(0,5 F_{Ez} h)^2}{F_{Ez} (GI_t + 0,5 F_{Ez} h)} = \frac{1}{\frac{4GI_t}{F_{Ez} h^2} + 1} \quad (\text{B7.04a})$$

De berekening van de gesteunde staaf volgens (7.11) geeft hetzelfde resultaat:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2}} = \frac{F_{Ez} \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2}} = \frac{1}{\frac{4GI_t}{F_{Ez} h^2} + 1} \quad (\text{B7.04b})$$

Bij het 'omslagpunt' geldt dus altijd: $n_z^* > 1$ en in veel gevallen (vooral bij rechthoekige doorsneden) geldt zelfs: $n_z^* \gg 1$.

b. Belasting door alleen een axiale drukkracht

Bij centrische plaatsing van de drukkracht is: $M_{y1} = 0$ zodat invullen van (7.8) geeft:

$$\begin{cases} -F_{Ez} \bar{v}_2 + F_c \bar{v}_2 n_z^* & +0 & = \bar{M}_{brz} \\ 0 & -0 - GI_t \frac{2\bar{v}_2}{h} & = -\bar{M}_{brz} \frac{h}{2} \end{cases}$$

Omdat altijd: $GI_t \neq 0$ geldt ook: $M_{brz} \neq 0$. Het is hier dus onmogelijk dat het steunverband onbelast zou blijven, zodat:

$$-F_{Ez} \bar{v}_2 + F_c \bar{v}_2 n_z^* = GI_t \frac{4\bar{v}_2}{h^2} \quad \text{waaruit volgt: } \frac{1}{n_z^*} = \frac{F_c}{GI_t \frac{4}{h^2} + F_{Ez}} \quad \text{wat identiek is met (7.13).}$$

Dit is altijd (veel) gunstiger dan de ongesteunde situatie, ook als de staaf excentrisch wordt belast, zoals direct is af te leiden uit paragraaf 7.1.2 en de formules (7.13) en (7.14).

c. Belasting door een combinatie van een gelijkmatig verdeelde belasting met een axiale drukkracht

Uit de eerste regel van (7.8) volgt dat er geen steunreactie optreedt is als:

$$k_1 \bar{M}_{y1} \frac{2\bar{v}_2}{h} + F_c \bar{v} - F_{Ez} \bar{v}_2 = 0 \quad \text{waaruit na deling door } \bar{v}_2 \text{ volgt: } k_1 \bar{M}_{y1} \frac{2}{h} = F_{Ez} - F_c n_z^*$$

Het 'omslagpunt' bij een gelijkmatig verdeelde belasting ligt nu bij een (veel) kleiner moment dan zonder de aanwezigheid van een drukkracht:

$$\bar{M}_{y1} = \frac{(F_{Ez} - F_c n_z^*) h}{2 \times 0,88} = 0,57 (F_{Ez} - F_c n_z^*) h \quad (\text{B7.05})$$

Hierdoor zal ook bij brede, korte gedrukte staven een steunverband vrijwel altijd een verbetering van de stabiliteit opleveren.

Getallenvoorbeeld:

Voor de twee constructievarianten uit het voorbeeld in Hoofdstuk 7.1.3 is nagegaan welke effecten er optreden bij toenemende belasting.

De resultaten zijn af te lezen in figuur B7.2 waarin zijn uitgezet:

horizontaal: de toenemende buigspanning $\bar{\sigma}_{my1}$ ten opzichte van de buigsterkte f_m

verticaal: de 2^{de}-orde buigspanningen $\bar{\sigma}_{mz2}$ ten opzichte van de buigsterkte f_m .

Onderscheiden zijn de 2^{de}-orde buigspanningen bij gesteunde staaf ten gevolge van:

- het (totale) moment: $\bar{M}_{z2} = -EI_z \bar{v}_2'''' = F_{Ez} \bar{v}_2$, dat bestaat uit de som van:

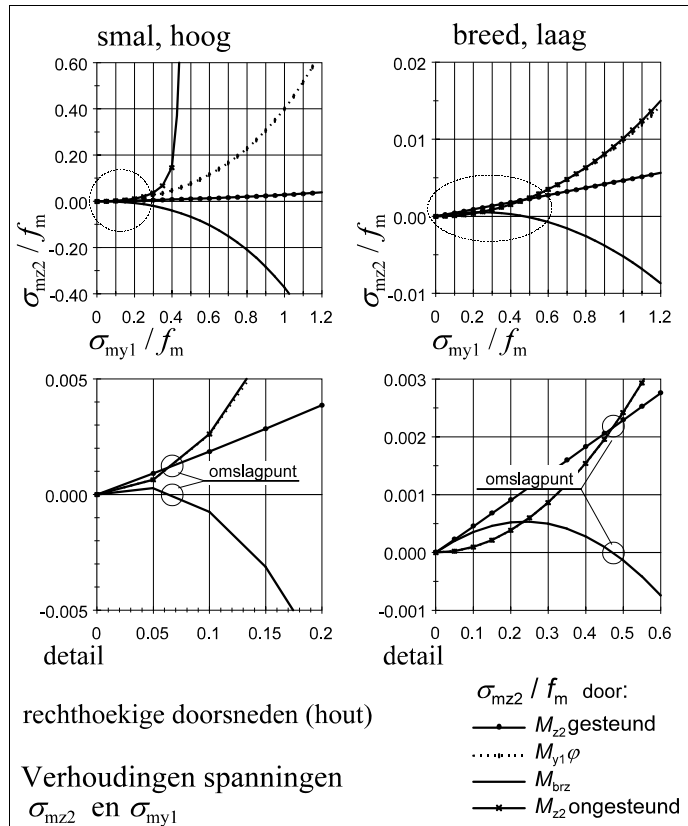
- de component door de belasting: $\bar{M}_{y1} \bar{\varphi} = \bar{M}_{y1} \frac{\bar{v}_2}{0,5h}$

- de component door de bijdrage van het steunverband: $-M_{brz}$
 negatief bij verkleining van \bar{M}_{z2} (is gunstig) en
 positief bij vergroting van \bar{M}_{z2} (ongunstig)

Ter vergelijking wordt ook weergegeven:

- de (totale) spanning veroorzaakt door: \bar{M}_{z2} voor het geval de staaf ongesteund zou zijn.

Het gebied nabij het 'omslagpunt' is in detail uitvergroot.



figuur B7.2

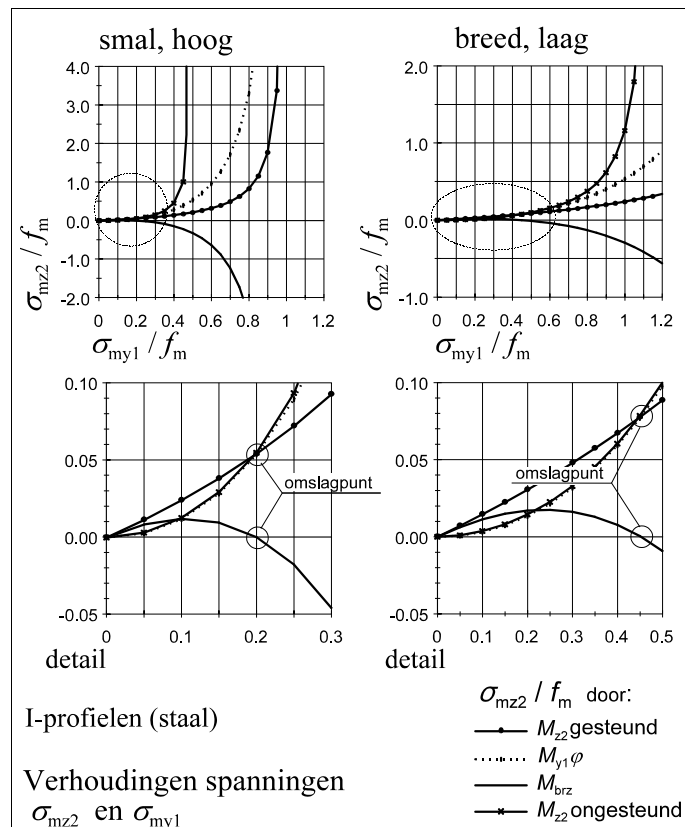
Variant:

De berekeningen en grafieken zijn ook gemaakt voor het geval er smalle, respectievelijk brede I-profielen (staal) zouden zijn toegepast.
De resultaten zijn afgebeeld in figuur B7.3.

De verhoudingen van de afmetingen zijn hier: - smal/hoog: $h/L = 1/20$ $b/h = 0,3$
- breed/laag: $h/L = 1/30$ $b/h = 0,7$

De stabiliteitsgrens (waarbij de 2^{de}-orde spanningen naderen tot oneindig) wordt hier bij een relatief lagere belasting bereikt, vooral bij smalle I-profielen.
Dit is vooral te verklaren uit de relatief geringe torsiestijfheid van (stalen) I-profielen ten opzichte van rechthoekige (houten) doorsneden.

Het gebied nabij het 'omslagpunt' is weer in detail uitvergroet.



figuur B7.3

Naar aanleiding van de gevonden resultaten is op te merken:

1. Bij ongesteunde, brede staven met $b > L / 30$ zijn de 2^{de}-orde effecten kleiner (en dus gunstiger) dan bij aanwezigheid van een zijdelings steunverband in de trekzone.
2. Bij smallere staven ligt het 'omslagpunt' bij een buigspanning die lager is dan de buigsterkte, zodat dan bij toenemende belasting het steunverband effectief gaat bijdragen aan de stabiliteit.
3. Bij gesteunde staven nemen de 2^{de}-orde buigspanningen vrij langzaam en (nagenoeg) lineair toe met de belasting; bij ongesteunde staven stijgen deze spanningen (veel) sneller.

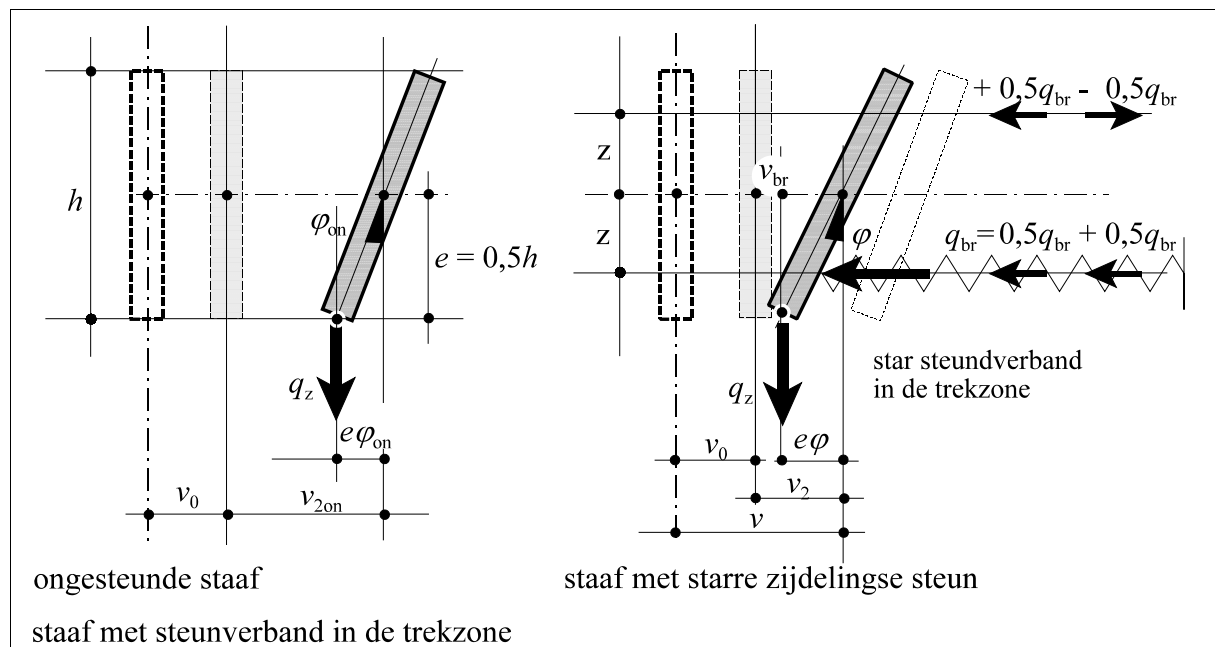
4. In beide gevallen treedt er een gevaarlijke versnelling op als de grenswaarde $n_z^* = 1$ (te) dicht wordt genaderd.
5. Daardoor blijkt de factor n_z^* een zeer bruikbare en duidelijke indicator te zijn om de stabiliteit van deze staven te kunnen beoordelen.
6. Door het aanbrengen van een steunverband in de trekzone kan de stabiliteit van brede, korte staven met een geringe belasting inderdaad verminderen. Slechts in uitzonderlijke gevallen betekent dat een gevaar voor de uiterste draagkracht, omdat bij geringe belasting de 2^{de}-orde effecten doorgaans gering zijn en ook omdat bij toenemende belasting het steunverband meestal alsnog in werking komt.

Of in een concrete situatie de stabiliteit en sterkte voldoende zijn kan eenvoudig worden bepaald door de formules (5.37) en (7.10) of (7.11) in te vullen en de uitkomsten te vergelijken.

7.2 Staven met verend steunverband

Als de staaf ergens (op afstand: z) wordt gesteund door een verend steunverband wordt aangenomen:

- De (verdeelde) reactiebelasting q_{br} (van: bracing = versterking door koppeling) is evenredig met de verplaatsing v_{br} van het gesteunde punt (zie figuur B7.4).
- Het verloop van q_{br} en v_{br} (en dus ook van het hierdoor veroorzaakte moment M_{brz}) is sinusvormig.



figuur B7.4

Voor een staaf op twee steunpunten geldt dan:

$$M_{brz} = \frac{\bar{q}_{br} L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (\text{B7.06})$$

Het steunverband dat wordt belast door de sinusvormige reactiebelasting q_{br} is daarmee op te vatten als een op buiging belaste staaf met verplaatsing:

$$v_{br} = \frac{\bar{M}_{brz} L^2}{\pi^2 EI_{br}} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (\text{B7.07})$$

Om de invloed van de stijfheid van het steunverband (EI_{br}) te kunnen vergelijken met de zijdelingse stijfheid van de staaf zelf (EI_z) kan worden ingevoerd een verhoudingsgetal:

$$K_{br} = \frac{EI_{br}}{EI_z} \text{ [dimensieloos]} \quad (\text{B7.08})$$

Hieruit volgt: $\bar{v}_{br} = \frac{\bar{M}_{brz} L^2}{\pi^2 EI_z} \frac{EI_z}{EI_{br}} = \frac{\bar{M}_{brz}}{F_{Ez} K_{br}}$ en omgekeerd:

$$\bar{M}_{brz} = K_{br} F_{Ez} (\bar{v}_2 - z\bar{\varphi}) \quad (\text{B7.09})$$

Dit kan worden uitgewerkt met (7.07) waar in de tweede regel als torsiemoment was gebruikt:

$$\bar{M}_{brt} = \bar{M}_{brz} \frac{h}{2}$$

Met moment-arm: $2z$ in plaats van h wordt dit vervangen door: $\bar{M}_{brt} = M_{brz} z$ zodat nu geldt:

$$\begin{cases} -F_{Ez} \bar{v}_2 + F_c \bar{v} & + k_1 \bar{M}_{y1} \bar{\varphi} & - K_{br} F_{Ez} (\bar{v}_2 - z\bar{\varphi}) & = 0 \\ k_1 \bar{M}_{y1} \bar{v} & - k_2 \bar{M}_{y1} e \bar{\varphi} - GI_t \bar{\varphi} & + K_{br} F_{Ez} (\bar{v}_2 - z\bar{\varphi}) z & = 0 \end{cases} \quad (\text{B7.10})$$

Met: $\bar{v} = \bar{v}_2 n_z^*$ is dit te schrijven in matrixnotatie als:

$$\begin{vmatrix} -F_{Ez} + F_c n_z^* - K_{br} F_{Ez} & k_1 \bar{M}_{y1} + K_{br} F_{Ez} z \\ k_1 \bar{M}_{y1} n_z^* + K_{br} F_{Ez} z & - K_{br} F_{Ez} z^2 - k_2 \bar{M}_{y1} e - GI_t \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nul stellen van de determinant levert:

$$\{F_{Ez}(1 + K_{br}) - F_c n_z^*\} (K_{br} F_{Ez} z^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e + GI_t) = (k_1 \bar{M}_{y1} n_z^* + K_{br} F_{Ez} z) (k_1 \bar{M}_{y1} + K_{br} F_{Ez} z)$$

Hieruit volgt de gezochte 2^{de}-orde term:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{F_c (K_{br} F_{Ez} z^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e + GI_t) + k_1 \bar{M}_{y1} (k_1 \bar{M}_{y1} + K_{br} F_{Ez} z)}{F_{Ez} (1 + K_{br}) (K_{br} F_{Ez} z^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e + GI_t) - (K_{br} F_{Ez} z) (k_1 \bar{M}_{y1} + K_{br} F_{Ez} z)}$$

De termen met K_{br}^2 in de noemer vallen tegen elkaar weg, zodat geschreven kan worden:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2 + F_c (GI_t + k_2 \bar{M}_{y1} e) + K_{br} F_{Ez} (k_1 \bar{M}_{y1} z + F_c z^2)}{F_{Ez} (1 + K_{br}) (GI_t + k_2 \bar{M}_{y1} e) + K_{br} F_{Ez} (-k_1 \bar{M}_{y1} z + F_{Ez} z^2)} \quad (B7.11)$$

De uitkomst van n_z^* ligt tussen twee uitersten, afhankelijk van de stijfheid van het steunverband K_{br} , die kan variëren tussen: 0 en ∞ .

- a. Bij een steunverband zonder enige stijfheid kan worden ingevuld: $K_{br} = 0$, waardoor de betreffende termen van teller en noemer vervallen, waarna er overblijft:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{F_{Ez} (GI_t + k_2 \bar{M}_{y1} e)} + \frac{F_c}{F_{Ez}} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kip}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \quad (B7.12)$$

Dit is identiek met formule (5.37) voor een ongesteunde staaf.

- b. Bij een star steunverband geldt: $K_{br} = \infty$, zodat daarbij alle termen zonder K_{br} te verwaarlozen zijn. Na deling van teller en noemer door: $K_{br} F_{Ez} z$ blijft dan over:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1} + F_c z}{\frac{GI_t}{z} + F_{Ez} z + \bar{M}_{y1} \left(-k_1 + k_2 \frac{e}{z} \right)} \quad (B7.13)$$

Bij een steunverband in de trekzone met: $z = 0,5h$ is dit identiek aan formule (7.10) die geldt voor een star steunverband.

De grootte van K_{br}

Een indruk van de orde van grootte van K_{br} kan worden verkregen door bijvoorbeeld een houten dakbalklaag te beschouwen.

Rekenvoorbeeld:

Praktisch voorkomende maten kunnen zijn:

- balken: $b = 80$ [mm], $h = 200$ [mm], aantal: n , h.o.h. afstand = 600 [mm] = $7,5b$.
- dakbeschot: triplex dikte $t = 18$ [mm], $E_{\text{beschot}} = 0,5 E_{\text{balk}}$

Er zijn meestal minimaal twee tot veel meer (als schijf op te vatten) samenwerkende balkvakken. Hier wordt gerekend met twee balkvakken.

Het steunverband heeft hierbij een stijfheid die wordt geleverd door:

$$\begin{aligned}
 1. \text{ het beschot: } & I_{z,\text{beschot}} = (2 \times 600)^3 \times 18 / 12 = 2,59 \times 10^9 \\
 2. \text{ de samenwerkende balken op afstand: } & 3 \times 10b \text{ (met regel van Steiner)} \\
 & I_{z,\text{balken}} = 2 \times 80 \times 200 \times (600)^2 = 11,52 \times 10^9 \\
 K_{br} = & \frac{EI_{z,\text{beschot}} + EI_{z,\text{balken op afstand}}}{EI_{z,\text{balken}}} = \frac{(0,5 \times 2,59 + 11,52) \times 10^9}{2 \times 200 \times 80^3 / 12} = 827
 \end{aligned}$$

Bij samenwerking van meerdere balkvakken wordt K_{br} nog vele malen groter. Bovendien is de kans klein dat alle initiële vervormingen in dezelfde richting optreden, zodat de reactiebelastingen in het steunverband elkaar gedeeltelijk tegenwerken, waardoor de zijdelingse vervormingen kleiner worden, hetgeen overeenkomt met een veronderstelde grotere stijfheid van het steunverband.

Ook bij wind/stabiliteitsverbanden kunnen vrij grote waarden voor K_{br} worden verwacht. Aandacht is uiteraard wel geboden als door de windbelasting (op bijvoorbeeld de kopgevel van een loods) het verband zover wordt vervormd dat alle zijdelings gesteunde (en op windzuiging belaste) spanten in dezelfde zijwaartse richting worden gedwongen.

Rekenvoorbeeld:

Praktisch voorkomende maten kunnen zijn:

- stalen I-profielen, h.o.h. afstand: $15 \times$ profielbreedte
- stabiliteitsverband van diagonalen en gordingen die samen met de liggers een vakwerk vormen. Hier wordt gerekend met één vak per 5 liggers.

De stijfheid van het als steunverband werkende vakwerk is globaal:

$$I_{z,\text{vakwerk}} = (\text{met regel van Steiner}) 2A_{\text{profiel}} \times (0,5 \times 15b)^2 \text{ (minus 50\% reductie door vervormingen diagonalen enz.)} = 56 Ab^2$$

$$I_{z,\text{profiel}} = Ai_z^2 = 5A \times (0,23b)^2 = 0,26 Ab^2$$

$$\text{waaruit volgt: } K_{br} = 56 / 0,26 = 215$$

Waarden van K_{br} tussen 100 en 1000 zijn dus praktisch zeker goed mogelijk.

7.2.1 Verend steunverband in de trekzone

Aangenomen wordt dat de belasting aangrijpt op het steunverband met: $e = z = 0,5h$, zodat, evenals bij (7.11) en in de noemer van (7.29) de termen $-k_1$ en k_2 tegen elkaar kunnen wegvallen, waardoor (7.29) overgaat in:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2 \frac{2}{h} + F_c \left(GI_t \frac{2}{h} + k_2 \bar{M}_{y1} \right) + K_{br} F_{Ez} \left(k_1 \bar{M}_{y1} + F_c \frac{h}{2} \right)}{F_{Ez} \left(GI_t \frac{2}{h} + k_2 \bar{M}_{y1} \right) + K_{br} F_{Ez} \left(GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} \right)} \tag{B7.14}$$

Voor enkele mogelijke gevallen van dakbalklagen met opwaarts gerichte (wind)belasting is nagegaan welke verhoudingen er bestaan tussen n_z^* en K_{br} , bij verschillende (verhoudingen tussen) afmetingen en spanningen.

a. Houten staven

Rechthoekige doorsneden: $h/L = 1/10$ en $1/30$ en: $b/h = 0,1$ en $0,6$.

De volledige sterkte wordt benut met: $\sigma_{my1} + \sigma_c = 0,5(f_m + f_c)$ $\sigma_{my1} + \sigma_c = 0,5(f_m + f_c)$.

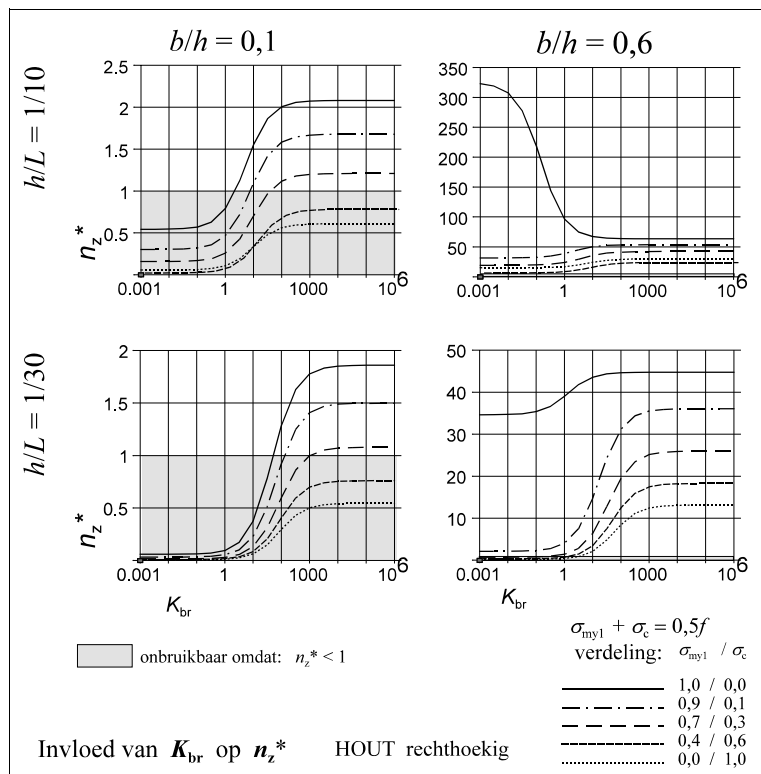
De resultaten van de berekening zijn weergegeven in figuur B7.5.

Horizontaal is uitgezet:

K_{br} van 10^{-3} tot 10^6 op logaritmische schaal

Verticaal is uitgezet:

de berekende 2^{de}-orde term n_z^*



figuur B7.5

Te zien is dat n_z^* alleen verandert bij stijfheidsverhoudingen K_{br} in een gebied van ongeveer: $0,01 < K_{br} < 500$ à 1000

Dit betekent dat als:

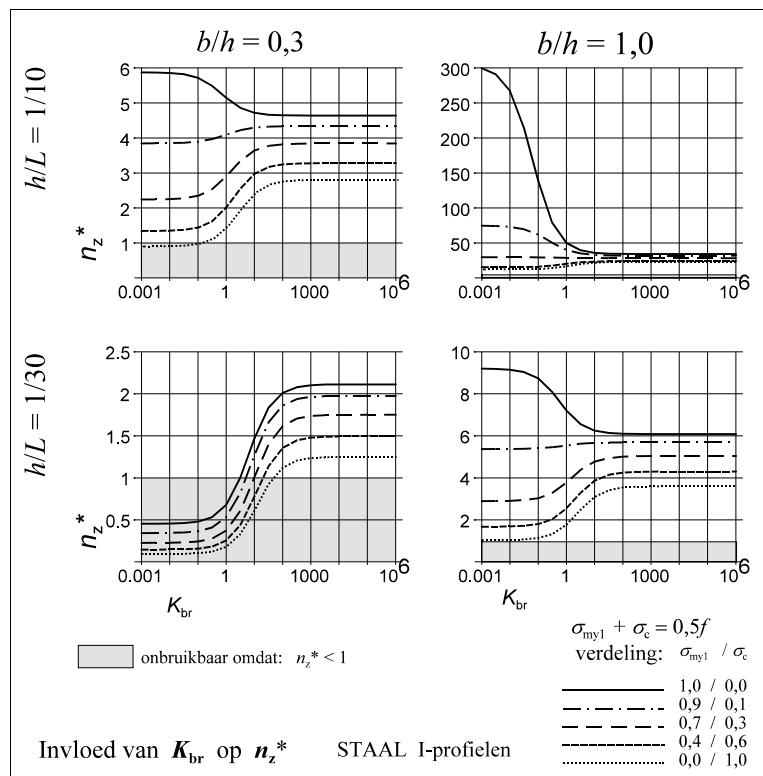
- $K_{br} < 0,01$ de staaf is te beschouwen als ongesteund,
- $K_{br} > 500$ het steunverband is te beschouwen als star.

b. Stalen staven

I-profielen: $h/L = 1/10$ en $1/30$ en: $b/h = 0,3$ en $1,0$
 De sterkte wordt benut met: $\sigma_{my1} + \sigma_c = f$.

De resultaten van de berekening zijn weergegeven in figuur B7.6.

De informatie op de horizontale en de verticale assen is dezelfde als in figuur B7.5.



figuur B7.6

Te zien is dat n_z^* alleen verandert bij stijfheidsverhoudingen K_{br} in een gebied van ongeveer: $0,01 < K_{br} < 100$

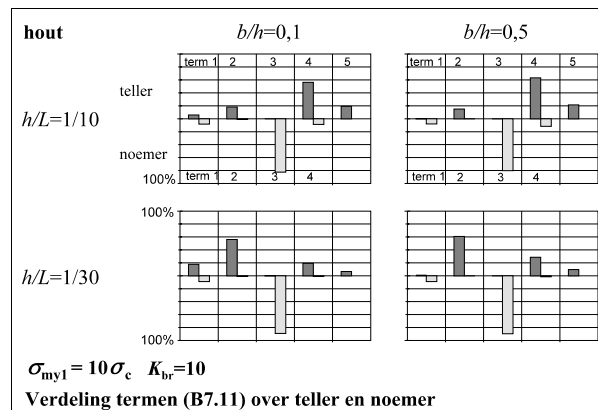
Dit betekent dat als:

- $K_{br} < 0,01$ de staaf is te beschouwen als ongesteund,
- $K_{br} > 100$ het steunverband is te beschouwen als star.

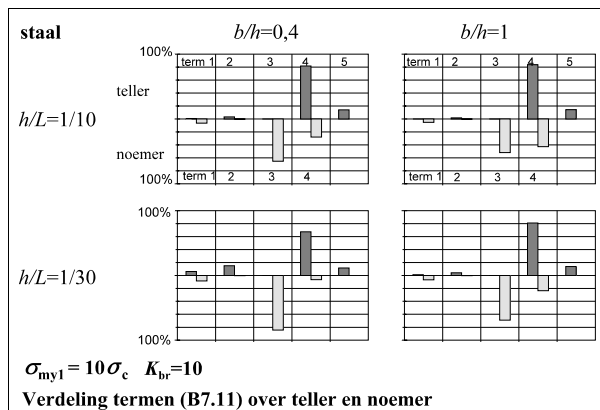
In het algemeen valt op:

- Drukspanningen hebben een veel groter en ongunstiger effect op de stabiliteit dan (even grote) buigspanningen.
- Bij ongesteunde staven heeft de staaf lengte een veel grotere invloed op de stabiliteit dan bij in de trekzone gesteunde staven.
- Bij brede, korte staven, die (bijna) geheel op buiging zijn belast, leidt het aanbrengen van een steunverband in de trekzone meestal tot een verkleining van de term n_z^* , (die in de betreffende gevallen overigens toch een vrij hoge waarde blijft houden). Dit verschijnsel werd al eerder geconstateerd in B7.1. Zie ook de grenswaarde volgens formule (B7.3).

Ter indicatie zijn voor een houten en een stalen staaf bij diverse verhoudingen in afmetingen, met een veerstijfheid $K_{br} = 10$, bij een grote buigspanning en een kleine drukspanning, de percentages van de vijf termen in de teller en de vier termen in de noemer van (B7.11) weergegeven in de figuren B7.7 en B7.8.



figuur B7.7



figuur B7.8

Opvallend is dat in de teller de tweede term ($2F_c GI_t/h$) en de vierde term ($K_{br} F_{Ez} M_{y1}$) overheersend zijn en dat de derde term ($F_c k_2 M_{y1}$) verwaarloosbaar is.

In de noemer is de derde term ($2K_{br} F_{Ez} GI_t/h$) altijd groot en bij stalen staven soms ook de vierde term ($K_{br} F_{Ez} h/2$). Hier is de tweede term ($F_{Ez} k_2 M_{y1}$) verwaarloosbaar.

Vereenvoudiging van (B7.14) is dus verantwoord met:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2 \frac{2}{h} + F_c GI_t \frac{2}{h} + K_{br} F_{Ez} \left(k_1 \bar{M}_{y1} + F_c \frac{h}{2} \right)}{F_{Ez} GI_t \frac{2}{h} + K_{br} F_{Ez} \left(GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} \right)} \quad (\text{B7.15})$$

De belangrijkste conclusies uit het voorgaande zijn:

1. Als er steunverbanden worden toegepast is het constructief meestal goed mogelijk om deze zo stijf te maken dat ze als star zijn op te vatten. Een waarde van: $K_{br} = 500$ is daarvoor doorgaans voldoende.
2. Bij als star op te vatten steunverbanden kan voor de berekening van n_z^* de ingewikkelde formule (B7.14) worden vervangen door (7.16) die zelfs nog eenvoudiger is dan de algemene formule voor ongesteunde staven (5.37).

B7.2.2 Verend steunverband in de neutrale lijn

Als ook hier weer wordt aangenomen dat de belasting aangrijpt op het steunverband geldt:

$$e = z = 0$$

Toegepast wordt de algemene formule (B7.11) waarbij, evenals in (B7.14) in de noemer de factoren k_1 en k_2 tegen elkaar kunnen wegvallen, zodat beiden overgaan in:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2 + F_c G I_t}{F_{Ez} G I_t (1 + K_{br})} = \left\{ \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kr}^2} + \frac{F_c}{F_{Ez}} \right\} \frac{1}{1 + K_{br}} \quad (\text{B7.16})$$

De term n_z^* kan dus, afhankelijk van K_{br} , variëren van de uitkomsten van (5.17) voor ongesteunde staven tot oneindig als het steunverband als star is op te vatten.

In dat geval zijn zowel de 2^{de}-orde uitbuiging in de 'zwakke' richting en dus ook de 2^{de}-orde momenten M_{z2} nul, maar er treden dan wel rotaties op.

Deze zijn desgewenst te berekenen met (6.20), waar uit de tweede rij in de matrix volgt:

$$k_1 \bar{M}_{y1} \bar{v} - G I_t = 0 \quad \text{dus:} \quad \bar{\varphi} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1} \bar{v}}{G I_t} \quad \text{Omdat hier: } \bar{v}_2 = 0 \quad \text{geldt dus: } \bar{v} = \bar{v}_0, \text{ dus:}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1} \bar{v}_0}{G I_t} \quad (\text{B7.17})$$

7.2.3 Verend steunverband in de drukzone

Als, zoals in zeer veel gevallen, de drukzijde van een staaf wordt gesteund, wordt doorgaans als vanzelfsprekend aangenomen dat er geen kip en zijdelingse knik kan optreden. Nagegaan wordt nu wanneer deze aanname veilig (genoeg) is.

Opnieuw wordt er van uitgegaan dat de belasting aangrijpt op het steunverband. Het verschil met een verband in de trekzone is nu dat de tekens van e en z negatief zijn, zodat:

$$e = z = -0,5h$$

Toegepast wordt de algemene formule voor verend steunverband (B7.11) waarbij, evenals in (B7.14) in de noemer de termen k_1 en k_2 tegen elkaar kunnen wegvallen, zodat beiden overgaan in:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2 \frac{2}{h} + F_c \left(GI_t \frac{2}{h} - k_2 \bar{M}_{y1} \right) + K_{br} F_{Ez} \left(-k_1 \bar{M}_{y1} + F_c \frac{h}{2} \right)}{F_{Ez} \left(GI_t \frac{2}{h} - k_2 \bar{M}_{y1} \right) + K_{br} F_{Ez} \left(GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} \right)} \quad (\text{B7.18})$$

De formules (B7.14) en (B7.18) bevatten beide dezelfde termen, maar in drie ervan verschillen de tekens, waarbij vooral het minteken in de vierde term van de teller verrassende gevolgen blijkt te hebben.

Bij een waarde van K_{br} die zeer klein is komt de situatie overeen met een ongesteunde staaf en resteert dezelfde formule overeenkomstig (5.37) zoals in het voorgaande bij een steunverband in de trekzijde is beschouwd, waarbij door het min-teken van de tweede term in de noemer de uitkomst van n_z^* (iets) kleiner wordt.

Bij een star steunverband met zeer grote K_{br} vervallen alle termen zonder K_{br} en resteren alleen de laatste twee termen van teller en noemer, met als gevolg:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{-k_1 \bar{M}_{y1} + F_c \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2}} \quad (\text{B7.19})$$

Dit is overeenkomstig (7.11), behalve het minteken in de teller.

De term n_z^* kan dus zijn:

- positief: bij een grote drukkracht, zonder / of met, een klein buigend moment,
- nul: als $k_1 \bar{M}_{y1} = 0,5F_c h$,
- negatief: bij een groot buigend moment, zonder / of met, een kleine drukkracht.

a. Belasting door een axiale drukkracht zonder moment

Als de term met M_{y1} vervalt, of rechtstreeks gekoppeld is aan een eventuele excentriciteit van F_c is er (zoals te verwachten) geen enkel verschil met de varianten zoals beschouwd in Bijlage B7.1.

b. Belasting door een gelijkmatig verdeelde belasting zonder axiale drukkracht

Bij deze belasting, zonder de invloed van een axiale drukkracht, wordt n_z^* altijd negatief:

$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{-k_1 \bar{M}_{y1}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2}} \quad (\text{B7.20})$$

Een negatieve waarde van n_z^* en dus ook van v_2 betekent dat de einduitbuiging v altijd kleiner wordt dan v_0 en dat vooral de getrokken zijde van de staaf wat meer recht wordt getrokken. Er treedt dus geen stabiliteitsprobleem op, maar er ontstaan wel extra buigspanningen in de zwakke richting, die in twee hoeken van de staaf zouden moeten worden gesuperponeerd op de buigspanningen σ_{my1} .

Vooruitlopend op de behandeling van de berekening van 2^{de}-orde spanningen in Hoofdstuk 8. kan alvast worden gemeld dat het hier om zeer kleine spanningen gaat, waaraan in de praktijk zelden of nooit aandacht wordt besteed.

Bijlage

8

**De Eindige-ElementenMethode
toegepast bij kip en knik
van houten liggers**

In zijn afstudeeronderzoek heeft Nicklas Haug (TU-Delft, faculteit CiTG - Civiele Techniek en Geowetenschappen) een aantal kipberekeningen gemaakt van houten liggers met rechthoekige doorsneden. Hierbij zijn gangbare internationale normen vergeleken met driedimensionale berekeningen volgens de, algemeen toegepaste en betrouwbaar geachte, EEM (Eindige-ElementenMethode).

De resultaten kunnen belangrijke implicaties hebben voor de beroepspraktijk. Daarom zijn ze, vooruitlopend op het definitieve afstudeerverslag, door dr.ir. P.C.J. Hoogenboom beschikbaar gemaakt in het rapport Kip van houten liggers [36]. In deze Bijlage zijn hiervan enkele representatieve resultaten opgenomen.

In het kader van deze dissertatie wordt de EEM als exact beschouwd.

B8.1. Elementennet

Het toegepaste eindige-elementenpakket Ansys heeft vele volume-elementen, waarvan Solid45 en Solid95 met name geschikt zijn voor mechanica-berekeningen. Solid45 heeft acht knopen en drie vrijheidsgraden per knoop. Solid95 heeft 20 knopen en ook drie vrijheidsgraden per knoop. Deze vrijheidsgraden zijn translaties in de lengte-, breedte- en hoogterichting.

Voor betrouwbare resultaten moet de elementenverdeling voldoende fijn zijn en moeten de elementvormen niet teveel afwijken van een kubus. Om dit te toetsen is een model gemaakt van een vrij opgelegde ligger. Nabij de liggereinden zijn knoopverplaatsingen zodanig verhinderd dat gaffelopleggingen ontstaan.

Er zijn modellen gemaakt met verschillende aantallen elementen in de x -, y - en z -richting.

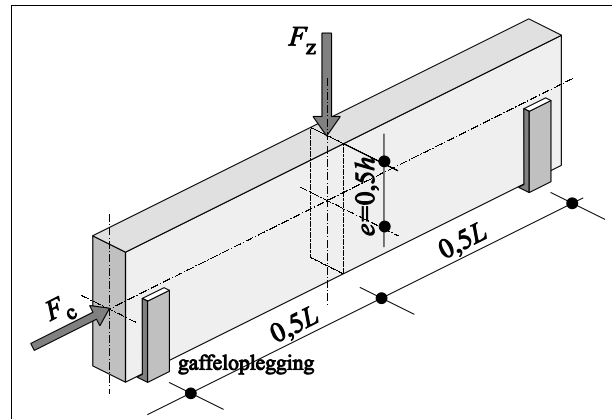
B8.2 Proefberekeningen

Om de vereiste netfijnheid te bepalen zijn eerst enige proefberekeningen uitgevoerd.

Daartoe is een ligger berekend met een handberekening en met een aantal varianten in Ansys met verschillende elementen en knopen.

Uitgegaan is daarbij van de volgende gegevens:

- overspanning: $L = 8 \text{ m}$
- rechthoekige doorsnede: $b = 100 \text{ mm}$,
 $h = 400 \text{ mm}$
- belast door een puntlast: $F_z = 10 \text{ kN}$
in het midden van de overspanning,
aangrijpend op de bovenrand en
verdeeld over de breedte van de ligger.
- het materiaal is orthotroop met de
volgende (voor hout representatieve)
eigenschappen:



figuur B8.1

- E-modulus evenwijdig aan de vezels: $E_x = 10000 \text{ N/mm}^2$
- E-modulus loodrecht op de vezels: $E_y = E_z = 400 \text{ N/mm}^2$
- glijdingsmodulus: $G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = 10000/16 = 625 \text{ N/mm}^2$
- buig- en druksterkte, bij (B8.3): $f_m = f_c = 30 \text{ N/mm}^2$

Ansys heeft de grootste spanning σ_{\max} , de kleinste spanning σ_{\min} en de grootste verplaatsing w bepaald met een lineair-elastische berekening.

Ook is de kritische belasting F_{kr} , waarbij de ligger instabiel wordt, bepaald door middel van een berekening van de eigenwaarde.

B8.2.1 Verwachtingswaarden volgens handberekening

Om een indruk te krijgen van spanningen en vervormingen zijn deze eerst met de hand berekend:

$$\text{Statische grootheden: } \begin{cases} I_y = 0,083 \times 100 \times 400^3 = 533,33 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ I_z = 0,083 \times 100^3 \times 400 = 33,33 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ W_y = 0,017 \times 100 \times 400^2 = 2,67 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \end{cases}$$

$$\text{Moment: } \bar{M}_y = \frac{FL}{4} = \frac{10 \times 8}{4} = 20 \text{ kNm}$$

$$\text{Spanning: } \bar{\sigma}_{my} = \frac{20 \cdot 10^6}{2,67 \cdot 10^6} = 7,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Doorbuiging: } \bar{w} = \frac{4}{48} \frac{20 \times 8^2 \times 10^{12}}{10000 \times 533 \cdot 10^6} = 20 \text{ mm}$$

$$\text{Kniksterkte: } F_{Ez} = \frac{\pi^2 \times 10000 \times 33,33 \cdot 10^6}{8000^2} = 51404 \text{ N} = 51,40 \text{ kN}$$

Torsiestijfheid: $GI_{tor} = 625 \times \frac{100^3 \times 400}{3} \times \left(1 - 0,63 \frac{100}{400}\right) = 70,21 \text{ kNm}$

Kipmoment: $M_{kip} = \sqrt{51,40 \times 70,21} = 60,075 \text{ kNm}$

Kritisch kipmoment volgens de methode van deze dissertatie:

$$M_{kr;kip e=0} = \frac{M_{kip}}{k_1} = \frac{60,075}{0,73} = 82,29 \text{ kNm}$$

Kritisch kipmoment bij puntlast op de bovenrand (teruggerekend met spreadsheet):

$$M_{kr;kip e=0,2} = 74,3 \text{ kNm}$$

Controle volgens de methode van deze dissertatie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_z^*} &= \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kip}^2 - k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}} = \\ &= \frac{(0,73 \times 74,3)^2}{60,07^2 - 0,81 \times 74,3 \times 0,2 \times 51,4} = \frac{2942}{3608 - 665} = \frac{1}{1,00} \end{aligned}$$

Kritische belasting:

$$F_{kr} = \frac{4 \times 74,3}{8} = 37,15 \text{ kN}$$

B8.2.2 EEM-berekeningen

De aantallen toegepaste elementen in de lengte-, breedte- en hoogterichting zijn aangeduid met: n_l , n_b , en n_h . De spanningen zijn de (normaal)spanningen in de lengte-richting.

De doorbuiging w is bepaald in de richting van de belasting.

Model 1

In model 1 is het element Solid45 gebruikt.

Uitkomsten model 1:

n_b	n_h	n_L	n_{totaal}	σ_{max}	σ_{min}	w	F_{kr}
1	4	8	32	6,63	-6,68	-20,71	38,3
1	4	16	64	7,09	-7,30	-21,04	37,9
1	4	32	128	7,28	-7,82	-21,21	37,7
1	4	64	256	7,34	-8,35	-21,34	37,6

2	4	8	64	6,66	-6,72	-20,77	37,6
2	4	16	128	7,14	-7,40	-21,09	37,3
2	4	32	256	7,35	-8,08	-21,29	37,1
2	4	64	512	7,42	-8,95	-21,45	37,0

4	16	16	1024	7,16	-7,44	-21,18	36,7
4	16	32	2048	7,37	-8,22	-21,32	36,6
4	16	64	4096	7,45	-9,41	-21,50	36,4
8	32	64	16384	7,45	-10,40	-21,98	36,2

Model 2

In model 2 is het element Solid95 gebruikt.

Het materiaal is orthotroop met de dezelfde eigenschappen als in model 1.

Uitkomsten model 2:

n_b	n_h	n_L	n_{totaal}	σ_{max}	σ_{min}	w	F_{kr}
2	8	16	256	7,53	-8,65	-21,38	36,4
2	8	32	512	7,50	-9,76	-21,54	36,2
2	8	64	1024	7,48	-10,90	-21,67	36,0
4	16	32	2048	7,51	-10,40	-21,55	36,1
5	20	40	4000	7,51	-11,30	-21,60	36,1

B8.2.3 Voorlopige conclusies**Spanningen**

De berekende buigtrekspanningen komen zeer goed overeen, maar de drukspanning volgens de EEM is in absolute zin groter dan de 7,5 N/mm² volgens de handberekening. Dit is het

gevolg van het plaatselijk inleiden van de puntlast, waardoor spanningsconcentraties ontstaan. Bij praktijksituaties zal een puntlast worden ingeleid door middel van een plaat. Als de spanningsverdeling nauwkeurig moet worden berekend zijn er veel minder 20-knoopselementen nodig dan 8-knoopselementen.

Vervormingen

De doorbuiging volgens de (gebruikelijke methode van) handberekening is 20,0 mm. In deze berekening is echter niet gerekend met dwarskrachtvervormingen en plaatselijke indringing van de puntlast in de ligger. De extra verplaatsing hierdoor is te berekenen met:

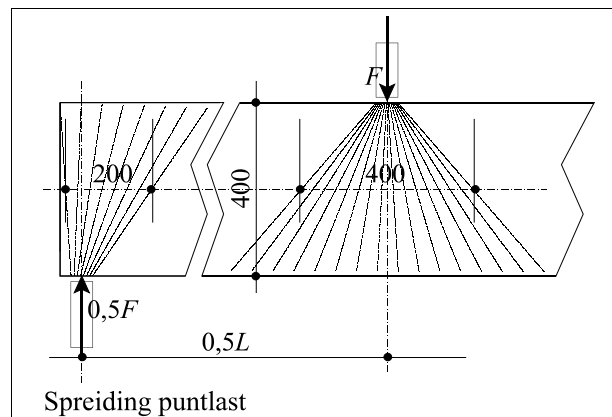
$$w_{dwarskracht} = \frac{F_z L}{4GA_s} = \frac{10 \cdot 10^3 \times 8 \cdot 10^3}{4 \times 625 \times \frac{5}{6} \times 100 \times 400} = 0,96 = \text{afgerond} = 1 \text{ [mm]}$$

De liggertheorie gaat uit van een inleiding van de puntlast als een parabolische schuifspanningsverdeling over de hoogte van de ligger en berekent dan de vervormingen van de neutrale lijn van de ligger. In de EEM-berekening wordt getoond welke verplaatsing er optreedt door het aangrijpingspunt van de puntlast (bij de bovenrand) ten opzichte van de oplegpunten van de ligger (bij de onderrand).

De extra verplaatsingen door de indrukking van het materiaal loodrecht op de vezelrichting is met een handberekening te schatten door het indringingsgebied te beschouwen als een intern kolommetje even lang als de liggerhoogte en met een gemiddeld oppervlak (door de spreiding van de krachten)

- boven de opleggingen: $b(0,5h)$ en
- onder de puntlast bh .

Zie figuur B8.2:



figuur B8.2

De indringing is dan ongeveer:

$$w_{indringing} = \left(\frac{1}{1} + \frac{0,5}{0,5} \right) \frac{F_z h}{E_{90} b h} = 2 \frac{F_z h}{E_{90} b h} = 2 \frac{10 \cdot 10^3 \times 400}{400 \times 100 \times 400} = 0,5 \text{ mm}$$

De totale in rekening te brengen verplaatsing is dus: $w_{totaal} = 20 + 1 + 0,5 = 21,5 \text{ mm}$

Dit komt nagenoeg overeen met de uitkomst van de nauwkeurigste van de hiervoor genoemde EEM-berekeningen: $w = 21,60$ mm.

Elementen

Het aantal toegepaste elementen heeft weinig invloed op de berekende F_{kr} .

De met de hand berekende eigenwaarde is 37,15 kN en circa 3% hoger dan de ongunstigste eigenwaarde berekend met Ansys. Het element met 20 knopen geeft iets lagere waarden dan het element met 8 knopen.

De kiplast wordt voldoende nauwkeurig bepaald bij alle netfijnheden.

In de navolgende berekeningen is het 20-knoopselement toegepast met $32 \times 8 \times 2$ elementen. Hiermee zijn zowel de grootste spanning, de doorbuiging als de kiplast nauwkeurig bepaald.

B8.3 Rekenresultaten

Voor een aantal liggers met verschillende verhoudingen in overspanning en doorsnede-afmetingen zijn de maatgevende combinaties van een axiale drukkracht F_c met een puntlast F_z in het midden van de ligger of een gelijkmatig verdeelde belasting q_z , beide aangrijpend in de neutrale lijn, berekend volgens:

- a. het EEM-programma Ansys.
- b. de methode met n_z^* - zoals ontwikkeld in deze dissertatie, aangeduid met "Rv".
- c. enkele Normen betreffende houtconstructies:
 - de Nederlandse Norm - NEN 6760
 - de Europese Norm - EC 5 *

- * In de knikformules van EC 5 wordt echter (indirect) uitgegaan van een (veel) kleinere v_0 . (Zie ook Bijlage B2.2 bij de afleiding van formule (B2.19)). Daardoor zal bij een relatief grote axiale drukkracht (vooral bij kleinere slankheden) de door EC 5 geaccepteerde belasting duidelijk groter zijn dan volgens overige berekeningen. Daarom is met de formules uit EC 5 ook een correctieberekening uitgevoerd met: $v_0 = L / 300$ als uitgangspunt, waarvan de resultaten worden weergegeven met "EC 5 corr".

Omdat de uiteindelijke resultaten (mede) afhankelijk zijn van de in rekening te brengen initiële vervormingen is hiervoor als uitgangspunt gekozen:

$$v_0 = L / 300$$

Van de berekende gevallen is een steekproef genomen van korte, lange, smalle en bredere staven. Voor deze Bijlage zijn geselecteerd liggers met:

- lengte: $L = 2$ m, respectievelijk $L = 6$ m,
- afmetingen: $b \times h = 50 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$, respectievelijk $b \times h = 100 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$,
- variabele belastingcombinaties: belasting loodrecht op de staafas F_z of Q_z met axiale drukkracht F_c .

Als criterium is gehanteerd dat de berekende spanningen nergens groter worden dan de hiervoor in B8.2 genoemde buig- en druksterkten.

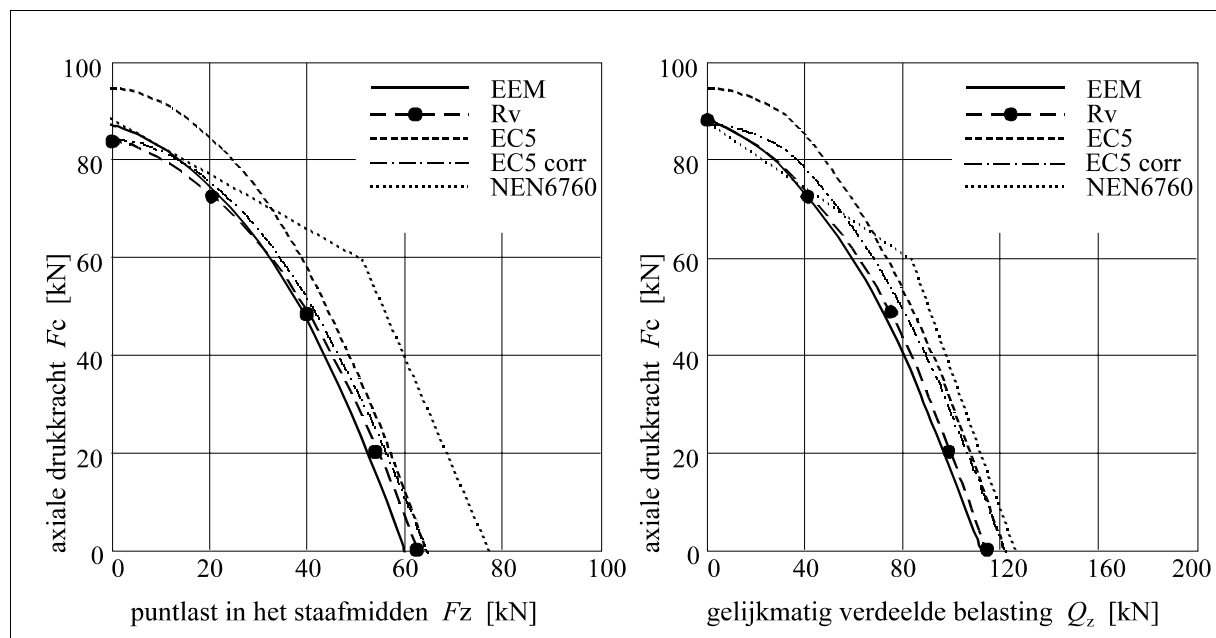
Elke belastingcombinatie is zodanig gekozen dat:

- a. de berekening wordt beëindigd als ergens in de staaf het aangegeven spanningsniveau is bereikt. Om ongewenste spanningsconcentraties loodrecht op de vezels te voorkomen zijn de puntlast en de oplegreacties gespreid over een oppervlak dat is ontleend aan de druksterkte van het materiaal.
- b. er wordt voldaan is aan de in (8.01) genoemde toetsformule,
- c. er wordt voldaan aan de in de genoemde Normen geldende toetsformules.

De uitkomsten van de berekeningen, resulterend in de maatgevende combinaties van F_c met F_z , respectievelijk Q_z , zijn weergegeven in de volgende grafieken:

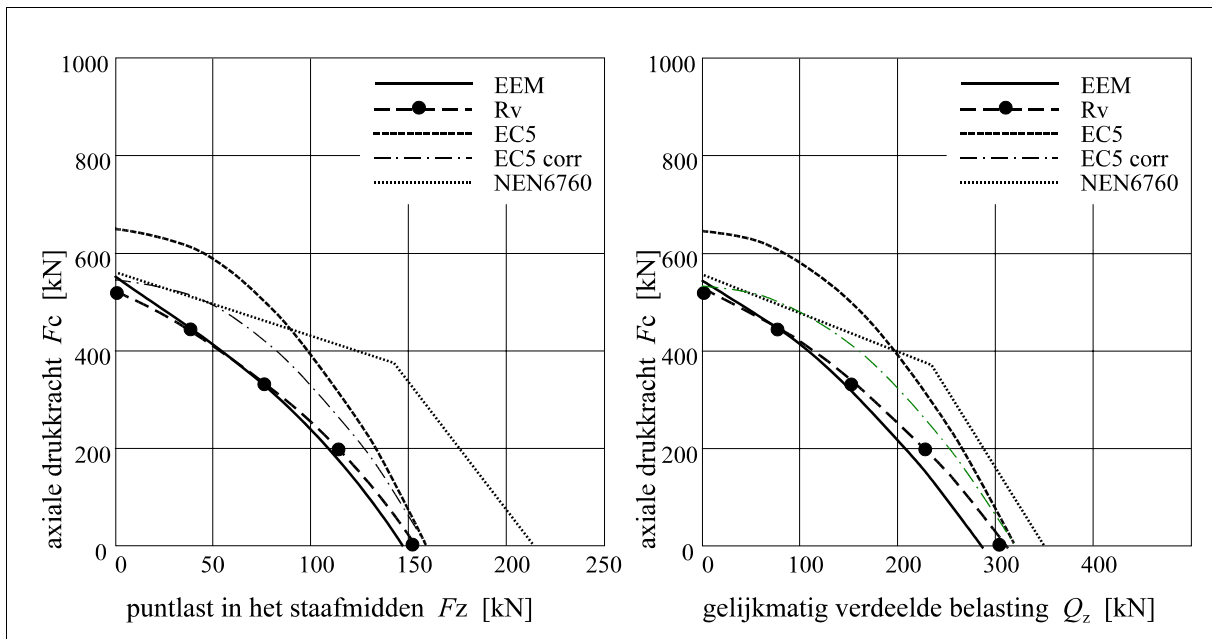
a Korte staven

$L = 2$ m **smalle doorsneden:** $b = 50$ mm $h = 400$ mm $\lambda_z = 140$:



figuur B8.3

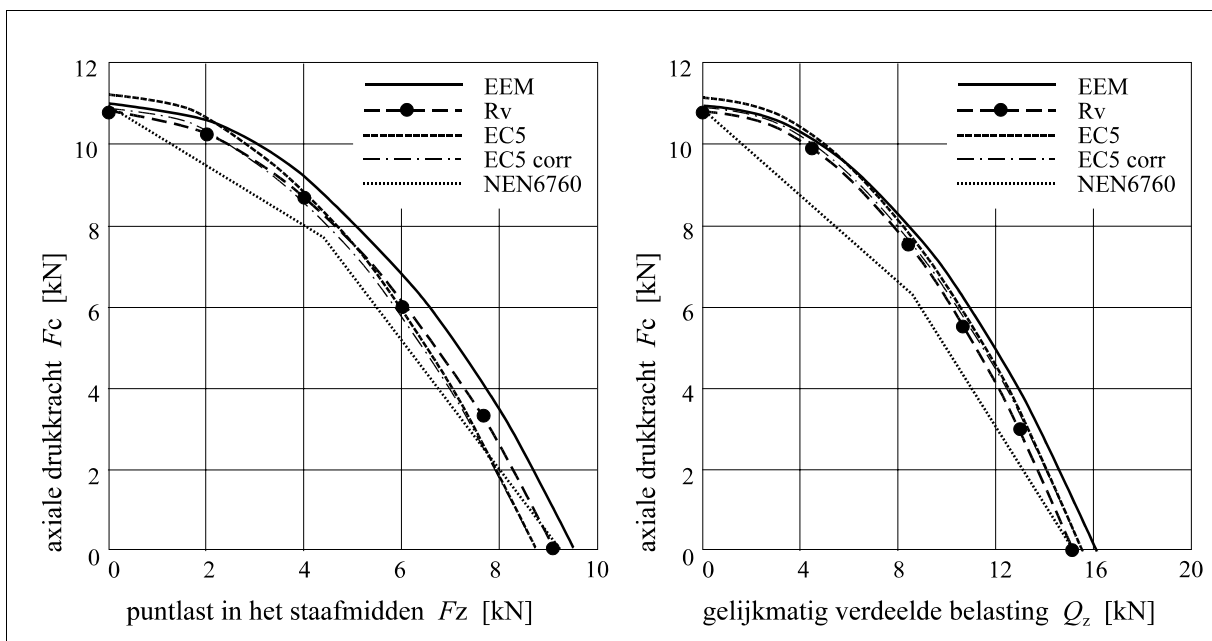
$L = 2 \text{ m}$ **breedere doorsneden:** $b = 100 \text{ mm}$ $h = 400 \text{ mm}$ $\lambda_z = 70$



figuur B8.4

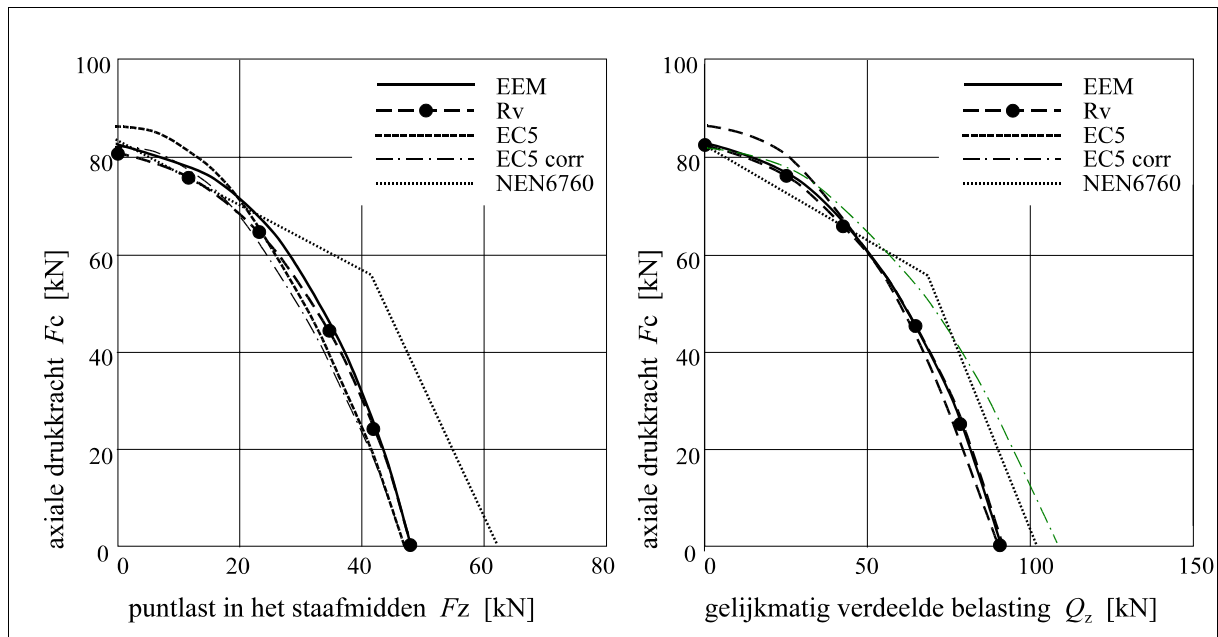
b Lange staven

$L = 6 \text{ m}$ **smalle doorsneden:** $b = 50 \text{ mm}$ $h = 400 \text{ mm}$ $\lambda_z = 420$



figuur B8.5

$L = 6 \text{ m}$ **breedere doorsneden:** $b = 100 \text{ mm}$ $h = 400 \text{ mm}$ $\lambda_z = 210$



figuur B8.6

B8.4 Conclusies

Naar aanleiding van deze resultaten is op te merken:

1. Bij een gelijkmatig verdeelde belasting kan een ongeveer 1,5 à 1,8 maal zo grote belasting worden geaccepteerd als bij een puntlast. De orde van grootte hiervan is verklaarbaar uit de verhoudingen van: belasting ten opzichte van het maximaal moment en de factoren k_1 voor beide gevallen:

$$\bar{M}_{kr} = \frac{0,88QL}{8} = \frac{0,73FL}{4} \Rightarrow \frac{Q}{F} = \frac{8}{4} \cdot \frac{0,73}{0,88} = 1,66$$

2. De uitkomsten volgens NEN 6760 zijn alleen veilig voor zeer grote slankheden. Opvallend zijn bij de overige gevallen de (te) grote geaccepteerde moment-veroorzakende belastingen. De verschillen met de EEM kunnen zelfs oplopen tot 30%.

De oorzaak hiervan is de reductie op de momenten bij de toets. (zie in Hoofdstuk 9.1 de opmerkingen hierover onder figuur 9.2).

3. Alleen voor zeer slanke staven komen de uitkomsten volgens EC 5 goed overeen met de EEM. Bij gedrongen staven accepteert EC5 veel grotere drukkrachten.

De oorzaak hiervan is de hiervoor al gesignaleerde kleinere in rekening te brengen waarde van ν_0 .

4. Als, ter vergelijking, in de formules van EC 5 dezelfde waarden voor ν_0 worden ingevuld ontstaan de afgebeelde grafieken met streep-stippellijnen gemerkt "EC5 corr". Te zien is dat dan de overeenstemming veel beter is. Maar bij vrijwel alle belastingcombinaties blijven de uitkomsten van EC5 bij gedrongen staven met kleinere slankheden toch nog aan de onveilige kant.

Opmerkelijk is overigens dat de initiële excentriciteit $t \nu_0$ in EC 5 alleen invloed heeft op de kniksterkte maar niet op de kipsterkte.

5. De uitkomsten van de berekeningen met de in deze dissertatie ontwikkelde methode met n_z^* stemmen steeds zeer goed overeen met de berekeningen volgens de EEM. Voor de onderzochte gevallen kan daarom toepassing van beide methoden gelijkwaardig worden geacht.

Bijlage

9

Diversen

B9.1 Voorlopige schatting van de 2^{de}-orde vervorming

Aan het slot van Hoofdstuk 4.1 werd opgemerkt dat de term n^* kan worden berekend uitgaande van een schatting van de totale eindvervorming v , waarbij een nauwkeurige berekening niet direct nodig is. Omdat v evenredig is met het aandeel van de 2^{de}-orde vervorming \bar{v}_2 daarin levert hun onderlinge verhouding direct de juiste waarde van n^* . Daarmee kan vervolgens de definitieve eindvervorming eenvoudig worden berekend.

Toelichting met getallenvoorbeeld voor een willekeurige staaf:

stel: berekend uit mechanica:	$\bar{v}_0 + \bar{v}_1 =$	$= 1,1$	[mm]
schatting: voorlopig als totale vervorming:	$\bar{v}_{\text{schatting}} =$	$= 1,5$	„
als uit de berekening zou volgen b.v.:	$\bar{v}_{2,\text{voorlopig}} =$	$= 0,3$	„
dan volgt de juiste 2 ^{de} -orde factor uit:	$n^* = 1,5 / 0,3$	$= 5$	
definitief:	$\bar{v}_{\text{definitief}} = 1,1 \times 5 / (5-1)$	$= 1,375$	„
alternatief:			
bij een andere schatting van b.v.:	$\bar{v}_{\text{schatting}} =$	$= 4,0$	[mm]
zou uit de berekening volgen			
(evenredig met de vorige schatting:	$\bar{v}_{2,\text{voorlopig}} = 0,3 \times 4,0 / 1,5 =$	$0,8$	„
waaruit volgt weer de juiste 2 ^{de} -orde factor:	$n^* = 4,0 / 0,8$	$= 5$	
met als definitief resultaat:	$\bar{v}_{\text{definitief}} = 1,1 \times 5 / (5-1)$	$= 1,375$	„

Dus: welke (willekeurige of zelfs foutieve) schatting van de totale vervorming er ook wordt gemaakt, bij juiste berekening van de hieruit volgende $\bar{v}_{2,\text{voorlopig}}$ volgt altijd de juiste n^* .

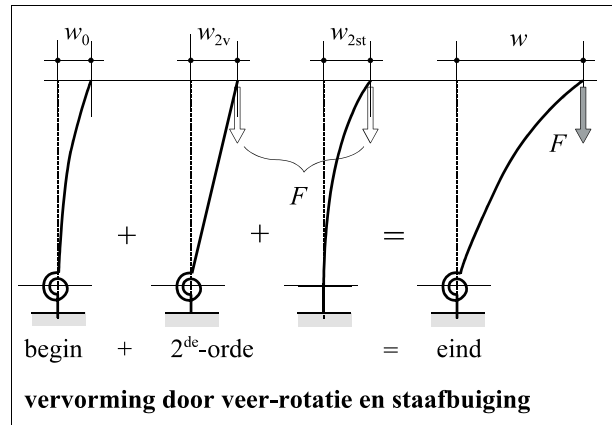
B9.2 Componenten van n^*

Bij de bepaling van de 2^{de}-orde term n_z^* in (5.15) werd de samenstelling hiervan in twee componenten vergeleken met de (parallel geschakelde) componenten van de 2^{de}-orde term van verend ingeklemde staven.

De analogie kan worden verduidelijkt voor vervormingen w met figuur B9.1 waarin schematisch is weergegeven een verend ingeklemde staaf.

Deze constructie is te splitsen in:

- een (oneindig) stijve staaf in een verende inklemming met veerstijfheid C ,
- een buigslappe staf met stijfheid EI ingeklemd in een (oneindig) stijve inklemming.



figuur B9.1

Afzonderlijk beschouwd geldt voor beide componenten:

	veer:	staaft:
Kritische belasting:	$F_{kr;veer} = \frac{C}{L}$	$F_{kr;staaft} = F_{Euler} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$
2 ^{de} -orde factoren:	$\frac{1}{n_{veer}} = \frac{F}{F_{kr;veer}} = \frac{FL}{C}$	$\frac{1}{n_{staaft}} = \frac{F}{F_E} = \frac{4FL^2}{\pi^2 EI}$
Hieruit volgen als afzonderlijke 2 ^{de} -orde componenten:	$w_{2veer} = \frac{M_2 L}{C} = \frac{FwL}{C} = \frac{w}{n_{veer}}$	$w_{2staaft} = \frac{M_2 (2L)^2}{\pi^2 EI} = \frac{w}{n_{staaft}}$

Voor het gehele systeem geldt volgens de in deze dissertatie ontwikkelde methode:

$$\frac{1}{n^*} = \frac{w_2}{w} = \frac{w_{2veer} + w_{2staaft}}{w_0 + w_{2veer} + w_{2staaft}} = \frac{\frac{w}{n_{2veer}} + \frac{w}{n_{2staaft}}}{w} = \frac{1}{n_{veer}} + \frac{1}{n_{staaft}}$$

dus:

$$\boxed{\frac{1}{n^*} = \frac{F}{F_{kr;veer}} + \frac{F}{F_{Euler}}} \tag{B9.01}$$

B9.3 Maatgevende situatie

Alvorens te beginnen aan (ingewikkelde) berekeningen kan het vaak nuttig zijn om vooraf te schatten welke doorsnede bij een gewenste overspanning en belasting ongeveer nodig is, of omgekeerd, welke spanning een ontworpen constructie ongeveer kan opnemen. Ook kan het nuttig zijn om vooraf al (enigszins) te weten of de UGT (uiterste grenstoestand), met toets op sterkte, of de BGT (bruikbaarheidsgrenstoestand), met toets op vervormingen, maatgevend zal zijn.

In Vuistregels [35] is een methode ontwikkeld om te bepalen welke grenstoestand maatgevend zal zijn en welke voorwaarden daarbij gelden. Hierbij zijn uitsluitend zijdelings (in de 'zwakke' richting) gesteunde liggers en kolommen in beschouwing genomen. Ten gerieve van ontwerpers, voor wie Vuistregels [35] met name is bedoeld, is daarbij uitgegaan van de in rekening te brengen belastingen volgens de BGT. Belastingfactoren, kruipeffecten, verschillen in E-moduli en modificatiefactoren zijn alle verwerkt in reductiefactoren. Uiteindelijk resulteert dit (voor enkele veel voorkomende categorieën gebouwen zoals woningen en utiliteitsgebouwen) in het invoeren van een standaardbelasting en het toetsen aan een (zoals in de 20^{ste} eeuw werd genoemd) toelaatbare spanning.

Een van de conclusies uit Vuistregels [35] is dat de maatgevendheid van UGT en BGT vooral wordt bepaald door de verhouding: liggerhoogte / overspanning.

De UGT is maatgevend bij hoge, korte liggers en de BGT is maatgevend bij lage, lange liggers.

Voor de meest gebruikelijke materialen zijn de grenswaarden, waar UGT en BGT tot dezelfde uitkomst leiden, verzameld in het volgende overzicht:

materiaal	toepassing	L/h grens	gebruikelijk L/h bij gebouwen	maatgevend
hout	vloeren en zware daken	10	18 à 22	BGT
	lichte daken	12	18 à 22	BGT
staal	vloeren en zware daken	22	20 à 25	beiden controleren
	lichte daken	25	25 à 30	beiden controleren
beton	gewapend	11	10 à 15	UGT
	voorgespannen	65	20 à 30	UGT

Als nu ook zijdelings ongesteunde staven in de beschouwing worden betrokken moet in de UGT altijd met een lagere spanning worden gerekend, of omgekeerd, zal er een groter profiel nodig zijn. Vooral bij relatief smalle profielen zal dan niet de vervorming in de BGT maar de kiptoets in de UGT maatgevend worden.

Uiteraard is het de meest zekere methode om beide berekeningen nauwkeurig te maken, maar toch is het wellicht nuttig een globale indicatie te geven van de te verwachten resultaten.

In Vuistregels [35] zijn de verhoudingen tussen belastingen, overspanningen en de te schatten breedte en hoogte van de te ontwerpen doorsneden geanalyseerd en verwerkt in reductiefactoren voor de E-modulus en de buigsterkte.

Voor het hier gestelde doel is het duidelijker om aan te sluiten bij de uitgangspunten van deze dissertatie en de vergelijkingen te baseren op de UGT en de daarbij behorende rekenbelasting waarin de in NEN 6702 genoemde belastingfactoren al zijn verwerkt. Voor de BGT-toets kunnen dan (iets) hogere E-moduli in rekening worden gebracht dan voor de kipstabiliteit. Verhogingen (door: belastingfactoren, modificatiefactoren, verschillen tussen E in de BGT en E in de UGT) en verlagingen (door: kruip - mede als gevolg van de verdeling tussen permanente en tijdelijke belasting - en scheurvorming) compenseren elkaar gedeeltelijk.

Voor de te beschouwen gevallen zijn zij afgerond tot een factor k_{E+} en verzameld in het volgende overzicht:

materiaal	$E_{\text{BGT}}/E_{\text{UGT}}$	modificatie- factoren	belasting- factoren.	kruip	totaal k_{E+}
hout	1,35	1,4	1,3	0,6	1,5
staal	1	1	1,3	1	1,3
beton	1	1,2	1,25	0,7	1,0

Ter indicatie wordt nu onderzocht of kip als stabiliteitsgeval (in de UGT) maatgevend is of dat de doorbuigingseisen in de BGT maatgevend zijn.

Vergeleken wordt: de maatgevendheid bij een staaf op twee steunpunten met gelijkmatig verdeelde belasting, centrisch aangrijpend in het midden van de doorsneden.

Ter vereenvoudiging wordt hier verder geen axiale drukkracht in beschouwing genomen (die overigens bij eventuele aanwezigheid de gezochte maatgevendheid duidelijk laat verschuiven naar de UGT).

BGT: maatgevende doorbuiging:

$$\bar{w} = \frac{5\bar{M}_{y1}L^2}{48EI_y} \leq 0,004L \quad \text{waaruit volgt:}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{my1}}{f_m} = \frac{\bar{M}_{y1}}{f_m W_y} \leq \frac{0,004 \times 48 \times k_{E+} EI_y}{5 f_m L W_y} = \frac{k_{E+} E h}{52 f_m L} \quad (\text{B9.02})$$

UGT: maatgevend is de toets:

$$\frac{\bar{\sigma}_{my1}}{f_m} + \frac{f_{Ez} \bar{v}_o}{k_1 f_m r_z (n_z^* - 1)} \leq 1 \quad (B9.03)$$

waarin:
$$\frac{1}{n_z^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kip}^2} = \left(\frac{k_1 \bar{\sigma}_{my1}}{\sigma_{kip}} \right)^2 = \left(\frac{k_1 \bar{\sigma}_{my1}}{f_m} \frac{f_m}{\sigma_{kip}} \right)^2 \quad (B9.04)$$

Vergeleken kunnen nu worden in welke van de formules (B9.2) respectievelijk (B9.3) de grootste buigspanningsverhoudingen $\bar{\sigma}_{my1} / f_m$ in rekening kunnen worden gebracht. In (B9.02) is dit de onbekende van een eenvoudige lineaire vergelijking, maar bij uitwerking leidt (B9.03) tot een 3^{de}-graadsvergelijking. Oplossing hiervan is het eenvoudigst door voor een aantal variabelen 'terug' te rekenen in een spreadsheet. Hiertoe kan het resultaat van (B9.04) worden ingevuld in (B9.03).

In een spreadsheet zijn nu ingevoerd:

- materiaalconstanten: E , G , f_m en k_{E+}
- variabele verhoudingen in afmetingen: L/h , b/h , en (voor I-profielen) t_f/h .
- initiële excentriciteiten e in relatie tot L (afhankelijk van het materiaal)

Met de 'terugrekenfunctie' is daarna bepaald met welke verhoudingen $\bar{\sigma}_{my1} / f_m$ nog juist aan de toetsen in de BGT en de UGT wordt voldaan.

De resultaten zijn weergegeven in de grafieken van:

- figuur B9.2 voor rechthoekige houten doorsneden en figuur B9.3 voor stalen I-profielen.

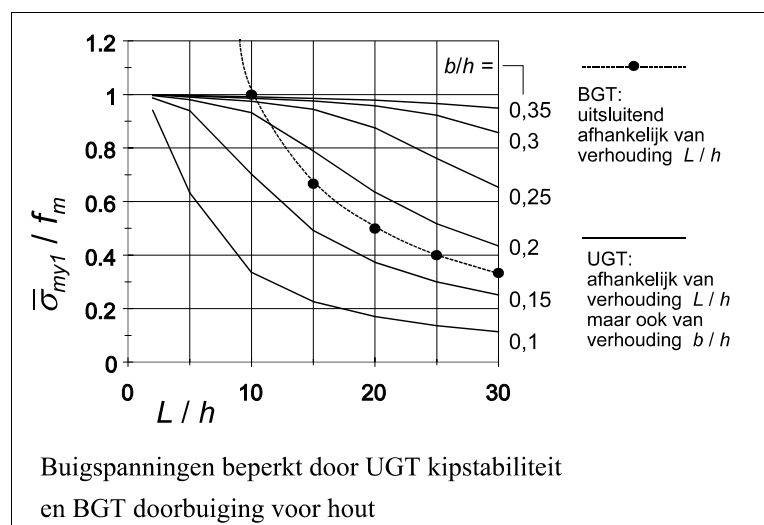
a. Houten staven

Op de assen zijn uitgezet:

- horizontaal: L/h .
- verticaal: $\bar{\sigma}_{my1} / f_m$.

Deze verhouding is vergelijkbaar met de 'kip'factoren:

- k_{ins} in NEN 6760
- k_{crit} in EC5
- ω_{kip} in NEN 6770



figuur B9.2

De 'spanningslijn' voor de BGT wordt alleen bepaald door de overspanning en de hoogte van de doorsnede en is onafhankelijk van de torsiestijfheid en de stijfheid in de 'zwakke' richting.

Voor hout valt op:

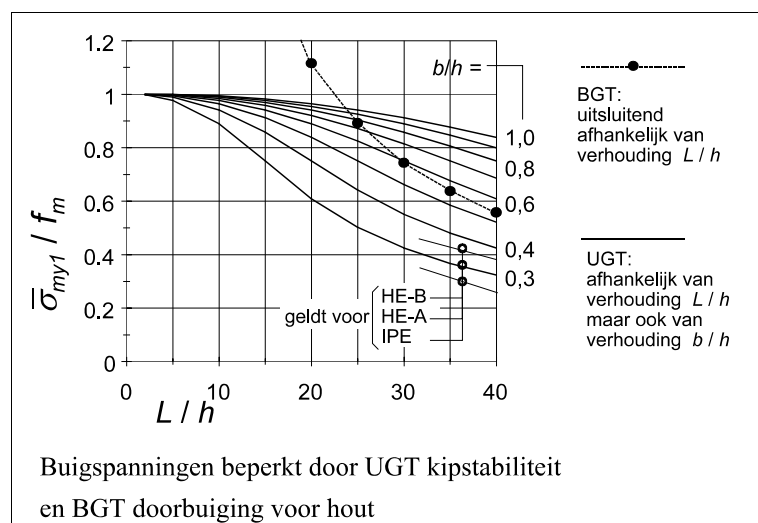
- voor alle korte, hoge staven met: $L/h < 10$ is altijd de kipstabiliteit maatgevend,
- bij smalle doorsneden met: $b/h < 0,15$ is de kipstabiliteit altijd maatgevend bij alle verhoudingen L/h ,
- bij brede doorsneden met: $b/h > 0,3$ is de BGT maatgevend bij $L/h > 12$ en bij $L/h < 12$ speelt de kipstabiliteit nauwelijks een rol,
- bij tussenvormen met: $0,15 < b/h < 0,3$ moeten zowel de UGT op kipstabiliteit als de BGT worden getoetst.

Dus: smalle/hoge doorsneden (zoals vooral bij gelamineerd hout worden toegepast) zijn meestal kipegevoelig. Gezaagd hout is doorgaans breder en geeft minder kipproblemen.

b. Stalen staven

De grafiek voor gewalste stalen I-profielen toont een gemiddelde van IPE, HE-A en HE-B en is uitsluitend indicatief bedoeld.

Voor praktische berekeningen moeten de juiste waarden (te ontleen aan tabellenboeken of computerprogramma's) worden gebruikt.



figuur B9.3

Bij staal valt op:

- voor alle profielen met: $L/h < 23$ is de kipstabiliteit maatgevend,
- bij smalle profielen met: $b/h < 0,5$ is de kipstabiliteit maatgevend,
- bij brede, lage profielen: $b/h > 0,8$ en: $L/h > 25$ is de BGT maatgevend,
- in de overige gevallen: moeten zowel de UGT (op kipstabiliteit) als de BGT (op doorbuiging) worden getoetst.

Dus bij alle HE-profielen hoger dan 500 mm en bij alle IPE-profielen kan kip maatgevend worden.



Curriculum vitae

Willem Jan Raven

1 juli 1938	geboren te Ede	
1955 - 1959	H.T.S. voor de Bouwkunde, Utrecht afdeling Bouwkunde	
1959 - 1962	H.T.I. Amsterdam cursussen Betonconstructeur, voortgezette cursus en speciale cursus mechanica	betontekenaar/constructeur bij: Gemeente Amsterdam, Constructiebureau Maaskant, Rotterdam Adviesbureau Christiansen, Rotterdam
1962 - 1970	TH, Delft faculteit Bouwkunde diploma 19 juni 1970 (met lof) architectuur en bouwtechniek	assistent docent bouwkunde H.T.S. Utrecht, afdeling Bouwkunde docent mechanica H.T.I. Amsterdam
1970 - 1974	architect/constructeur bij Environmental Design, Van der Grinten, Heijdenrijk en Manche, Amersfoort	docent bouwkunde H.T.S. Utrecht, afdeling Bouwkunde docent mechanica en utiliteitsbouw H.T.I. Amsterdam
1974 - 1982	lid van E.D. Maatschap van architecten en ingenieurs Heijdenrijk, Manche, Raven en Stemerding, Amersfoort	wetenschappelijk (hoofd)medewerker TH / TU, Delft faculteit Civiele Techniek
1982 - 2003	docent bouwkunde en studierichtingsleider H.T.S. Rotterdam, afdeling Bouwkunde (tot 1998)	universitair docent TU, Delft faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen
1983 - heden	adviseur bouwkunde en akoestiek t.b.v. Commissie Orgelzaken voor de Prot.Kerk in Nederland	2001 - 2006 promotiestudie stabiliteit en sterkte van staven



Tenslotte

De combinatie van de vakgebieden architectuur en constructie heeft altijd mijn bijzondere belangstelling gehad. In m'n beroepsuitoefening heb ik me daarom meestal gelijktijdig bezig gehouden met ontwerpen, construeren en proberen uit te leggen wat de kenmerken zijn van geïntegreerd denken en doen. Nooit had ik me daarbij kunnen voorstellen nog eens zo diep in een gespecialiseerd onderwerp als kip- en knikstabiliteit te zullen duiken.

De aanleiding tot deze studie was eigenlijk heel onbedoeld.

Bij de bestudering van de serie normen voor bouwconstructies (die naar aanleiding van de introductie van het bouwbesluit in 1992 waren verschenen) groeide niet alleen het onbehagen over de ingewikkeldheid van de bepalingen over kip- en knikstabiliteit en de grote verschillen in formuleringen bij de diverse constructiematerialen, maar kwam ook het idee boven dat niet alleen een veel eenvoudiger, maar ook een universele behandeling mogelijk zou moeten zijn.

Het voorlopige resultaat van een zomerlang puzzelen, lezen, schrijven en rekenen was in 2001 aanleiding voor prof. Vamberský en prof. Blaauwendraad het idee te steunen om hiervan een promotiestudie te maken. En zo is het gekomen.

Hooggeleerde Blaauwendraad, beste Johan, ik heb ervaren dat je duidelijk met veel genoegen mijn ontdekkingsreis hebt vergezeld en ik ben buitengewoon dankbaar voor je voortdurende betrokkenheid, je opbouwende kritische visie en de interessante gesprekken die we hadden over mechanica en andere zaken.

Hooggeleerde Vamberský, beste Jan, wij mogen terugzien op een zeer constructieve en plezierige samenwerking van bijna twintig jaar bij het begeleiden van afgestudeerden op het gebied van gebouwen en bouwtechniek. Zeer veel dank voor je stimulerende rol in dit promotieproces. Ik denk dat je met voldoening zult constateren dat alle constructiematerialen inderdaad op één noemer passen.

Bij een onderneming als deze besef je heel goed dat belangstelling, hulp en bemoediging van je omgeving steeds nodig is, want zonder dat blijf je immers nergens. Vooral mag ik noemen: ir. J.H.Th. Koelman, dr.ir. P.C.J. Hoogenboom, dr. J.H.A. Dambrink, W.W. Massie M.Sc.P.E. en natuurlijk mijn lieve Hanne. Zonder jou zou ik echt nergens zijn gebleven.

Tenslotte zou ik graag willen meezingen met het morgenlied:

*Wij mogen leven door zijn kracht,
de taak door Hem ons toegedacht
volbrengen; en help ons dan
meer dan ons lied U vragen kan.*

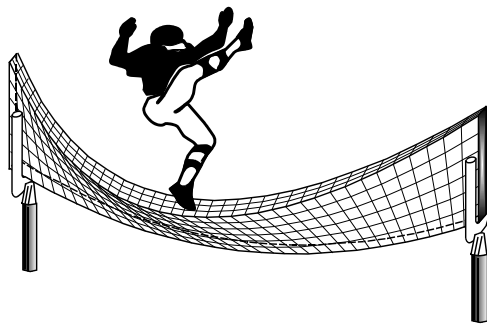
(Gezang 381: 4/5, Liedboek voor de kerken)

Gezang 381

New every morning is the love

Willem Jan Raven, najaar 2005

The image displays a piano accompaniment score for the hymn 'New every morning is the love'. The score is written in G major (one sharp) and 4/4 time. It consists of seven systems of music, each with a grand staff (treble and bass clefs). The first system begins with a treble clef and a key signature of one sharp. The second system continues the piece. The third system is marked with a '2' above the treble clef, indicating a second ending. The fourth system continues the piece. The fifth system continues the piece. The sixth system is marked with a '3' above the treble clef, indicating a third ending. The seventh system concludes the piece. The music features a mix of eighth and sixteenth notes, with some rests and dynamic markings.



Inlegvel

NIEUWE BLIK OP KIP EN KNIK

OVERZICHT

1. Verzamelen gegevens:

maatgevend moment (1 ^{ste} -orde)	\bar{M}_{y1}	bij staaf op twee steunpunten: in het midden bij uitkraging: bij de inklemming	
initiële uitbuiging in de 'zwakke' richting (eventueel ook in de 'sterke' richting)	$\bar{v}_0 = k_{v0}L$	staaf op twee steunpunten	k_{v0} te ontlenen aan de materiaaleigenschappen en/of de van toepassing zijnde normen. orde van grootte: $k_{v0} = 1/1000$ à $1/300$
	$\bar{v}_0 = \pi k_{v0}L$	uitkraging	
statische grootheden	$A \ b \ h \ I_y \ I_z \ I_{tor}$ $W_y \ W_z \ \text{enz.}$	te ontlenen aan mechanicaformules of tabellen	
materiaal-eigenschappen	$E \ G \ f_c \ f_m$ enz.	afhankelijk van materiaal	
excentriciteit	e	positief in de richting van de belasting	

2. Keuze (reductie)factoren afhankelijk van staaftype en belasting:

geldigheidsgebied		alle doorsneden			alleen I-profiel		
factoren:		k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
herkomst factoren (Hoofdstuk of Bijlage) :		H5 / H6		H8	B3	H8	
staaf op twee steunpunten met:	constant moment	1,0	nvt	1,0		3,14	nvt
	gelijkmatig verdeelde belasting	0,88	0,81	0,88		2,55	nvt
	geconcentreerde last in het midden	0,73	0,87	0,73		2,00	nvt
	torsie-inklemming gaffelopleggingen doorgaand over meer steunpunten				5,5 1,0 1,0		
uitkraging met:	constant moment	1,0	nvt	1,0		1,0	nvt
	gelijkmatig verdeelde belasting	0,24	0,65	0,79		0,6	2,5
	geconcentreerde last in het midden	0,41	0,57	0,85		1,0	1,0
	gaffeloplegging torsie-inklemming				nvt 1,0		

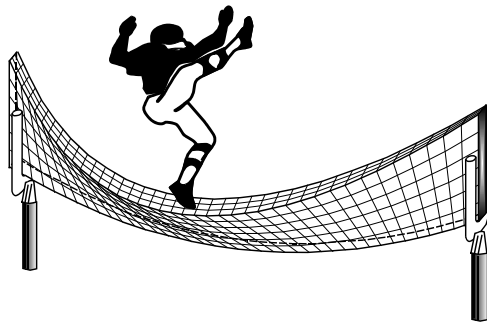
3. Benodigde componenten afhankelijk van staaftype en belasting:

knik-sterkte	staaf op twee steunpunten:	$F_{Ez} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$	uitkraging:	$F_{Ez} = \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2}$
torsie-stijfheid:	algemeen:	$GI_t = GI_{tor} (1 + k_4 C_{tw})$	rechthoekige staaf: $C_{tw} = 0$ (verwaarloosbaar)	I-profiel: $C_{tw} = \frac{\pi^2 EI_z h^2}{4L^2 GI_{tor}}$
kritisch kipmoment:		$M_{kip}^2 = F_{Ez} GI_t$	of:	$M_{kip} = \sqrt{F_{Ez} GI_t}$
2 ^{de} -orde term:		$\frac{1}{n_z^*} = \frac{1}{n_{zM}^*} + \frac{1}{n_{zF}^*}$	momentcomponent:	$\frac{1}{n_{zM}^*} = \frac{(k_1 \bar{M}_{y1})^2}{M_{kip}^2 + k_2 \bar{M}_{y1} e F_{Ez}}$
ongesteunde staaf:	Let vooral op de grootte van de term n_z^* 'alarmfunctie' om te waarschuwen tegen dreigende instabiliteit.	axiaalkracht-component		N.B. bij uitkraging: $ \bar{M}_{y1} $ absolute waarde $\frac{1}{n_{zF}^*} = \frac{F_c}{F_{Ez}}$

vervolg ongesteunde staaf:	combinaties van verschillende typen belasting invullen met juiste teken (bij tegengestelde tekens rekenen met grootste veldmoment als ondergrens (bij $k_2 \bar{M}_{y2}$ factor k_2 zonder ondergrens)		$k_1 \bar{M}_{y1} = \sum k_{1,i} \bar{M}_{y1,i}$ en: $k_2 \bar{M}_{y2} = \sum k_{2,i} \bar{M}_{y2,i}$ $i = \text{geval 1, respectievelijk geval 2 enz.}$
staaf met steunverband in de trekzone:	staaf op twee steunpunten: $\frac{1}{n_z^*} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1} + F_c \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2}}$		uitkraging: $\frac{1}{n_z^*} = \frac{k_1 \bar{M}_{y1} + F_c \frac{h}{2}}{GI_t \frac{2}{h} + F_{Ez} \frac{h}{2} - \bar{M}_{y1} (k_1 - k_2)}$
n_y^*	indien gewenst: overeenkomstig n_z^* (zonder momentcomponent)		$\frac{1}{n_y^*} = \frac{F_c}{F_{Ey}}$
totaal moment: $\bar{M}_{z;tot} = \bar{M}_{z2} + \bar{M}_{z1;tot} + 2\bar{M}_{z2;fl}$	2 ^{de} -orde buigend moment: $\bar{M}_{z2} = \frac{F_{Ez} \bar{v}_0}{k_3 (n_z^* - 1)}$		(indien aanwezig) 1 ^{ste} -orde moment: $\bar{M}_{z1;tot} = \bar{M}_{z1} \frac{n_z^*}{n_z^* - 1}$
	alleen bij I-profiel: 2 ^{de} -orde flensbuigingsmoment op te nemen door: $W_{flz} = 0,5 W_z$ (dus $\bar{M}_{z2;fl}$ dubbel rekenen)	staaf op twee steunpunten:	$\bar{M}_{z2;fl} = \frac{F_{Ez} h}{4 \bar{M}_{y1}} \frac{n_z^*}{n_z^*} \bar{M}_{z2}$
		uitkraging:	$\bar{M}_{z2;fl} = \frac{k_3 F_{Ez} h}{2 k_1 \bar{M}_{y1}} \frac{n_z^*}{n_{zM}^*} \left(\frac{1,4}{C_{tw}} + 1 \right) \bar{M}_{z2}$
desgewenst:	torsiemoment bij de steunpunten op te nemen door W_{tor}		$\bar{M}_t = k_5 \left(\bar{M}_{y1} - \frac{k_6 F_{Ez} e}{k_1 n_{zM}^*} \right) \frac{\bar{v}}{L}$

4. Toetsen:

UGT	staaf op twee steunpunten: maatgevend in het midden van de staaf		$\frac{F_c}{F_u} + \frac{\bar{M}_{y1}}{M_{uy}} + \frac{\bar{M}_{z;tot}}{M_{uz}} \leq 1$
	uitkraging: voldaan moet zijn aan beide toetsen:		in het veld: $\frac{F_c}{F_u} + 0,7 \frac{\bar{M}_{y1}}{M_{uy}} + \frac{\bar{M}_{z2}}{M_{uz}} \leq 1$ bij de inklemming: $\frac{F_c}{F_u} + \frac{\bar{M}_{y1}}{M_{uy}} + \frac{\bar{M}_{z2;fl}}{0,5 M_{uz}} \leq 1$
BGT	doorbuiging: n^* berekenen met belasting in de BGT (dus met aangepaste belastingfactoren, zie NEN 6702)	in de 'sterke' richting	$\bar{w} = (\bar{w}_0 + \bar{w}_1) \frac{n_y^*}{n_y^* - 1} \quad \text{met} \quad \frac{1}{n_y^*} = \frac{F_c}{F_{Ey}}$ $\bar{w} \leq \bar{w} \text{ toelaatbaar (= meestal } 0,004 L)$
		eventueel in de 'zwakke' richting	$\bar{v} = (\bar{v}_0 + \bar{v}_1) \frac{n_z^*}{n_z^* - 1}$ $\bar{v} \leq \bar{v} \text{ toelaatbaar (= meestal } 0,004 L)$



Stellingen

STELLINGEN

behorend bij het proefschrift

NIEUWE BLIK OP KIP EN KNIK

Willem Jan Raven

Technische Universiteit Delft

30 mei 2006

- 1 Ondanks de zeer grote verschillen in de bepalingen over kip en knik in de gangbare normen is het mogelijk voor alle materialen de toetsingsregels op dezelfde wijze te formuleren.
 - 2 Bepalingen in bouwvoorschriften betreffende de stabiliteit van draagconstructies waarin geen overzichtelijke berekening van de 2de-orde effecten wordt verlangd zouden verboden moeten zijn.
 - 3 Bij relatief brede staven kan de kipberekening volgens de Nederlandse norm voor houtconstructies tot onveilige uitkomsten leiden.
 - 4 De berekening van draagconstructies mag minder nauwkeurig worden naarmate het verschil tussen de werkelijke belasting en de kritische belasting groter is.
 - 5 Het bedenken van vuistregels vergroot het inzicht en het gebruik ervan bespaart tijd bij het ontwerpen van draagconstructies.
 - 6 Het verdient altijd aanbeveling om de resultaten van berekeningen visueel te maken.
 - 7 Wat hedentendage als cultureel erfgoed wordt beschouwd is indertijd niet bedoeld om te dienen als bron van historische informatie, maar is dat vanzelf geworden.
 - 8 Cultureel erfgoed kan maar één keer worden vernietigd, daarom is het nodig er zuinig op te zijn.
 - 9 Voor het realiseren van een goede akoestiek voor gemeentezang in kerken is een royale hoogte van de ruimte de belangrijkste voorwaarde.
 - 10 Orgelpijpen lijken op mensen in een democratische samenleving. De minderheid van de tongen moet bij temperatuurswisseling instemmen met de meerderheid van de lippen.
 - 11 Spreken in het openbaar is sinds de uitvinding van de mobiele telefoon veel gemakkelijker geworden.
-

Deze stellingen worden opponeerbaar en verdedigbaar geacht en zijn als zodanig goedgekeurd door de promotoren,

Prof.dr.ir. J. Blaauwendraad

Prof.dipl.-ing. J.N.J.A. Vamberský

PROPOSITIONS

belonging to the thesis

NEW VISION ON FLEXURAL-TORSIONAL BUCKLING

Willem Jan Raven

Delft University of Technology

30 May 2006

- 1 In spite of very large differences between the rules for flexural-torsional buckling in the various design codes, it is possible to express the associated checking formulas for all materials in a unified manner.
- 2 Design codes for structural stability that do not include a well-organized calculation of the 2nd order effects should be prohibited.
- 3 Lateral stability calculations using the Dutch design code of timber structures can yield unsafe results for relatively wide structural members.
- 4 The more a structure's critical load exceeds its real load, the more it is permissible to use less exact structural design calculations.
- 5 Developing rules of thumb increases insight and their use saves time in structural design.
- 6 It is recommended that results of calculations be presented visually.
- 7 What today is considered to cultural heritage was not intended as a source of historical information originally; it has become so by itself.
- 8 Cultural hertiage cannot be replaced once destroyed, it is necessary to cherish it.
- 9 Good acoustics for congregational singing in churches depends primarily on the height of the hall.
- 10 Organ pipes resemble mankind in a democratic society. At a change of temperature the minority of tongues has to agree with the majority of lips.
- 11 Public speaking has become more common since the invention of the mobile telephone.

These propositions are considered to be both opposable and defensible and have been approved as such by the supervisors,

Prof.dr.ir. J. Blaauwendraad

Prof.dipl.-ing. J.N.J.A. Vamberský

